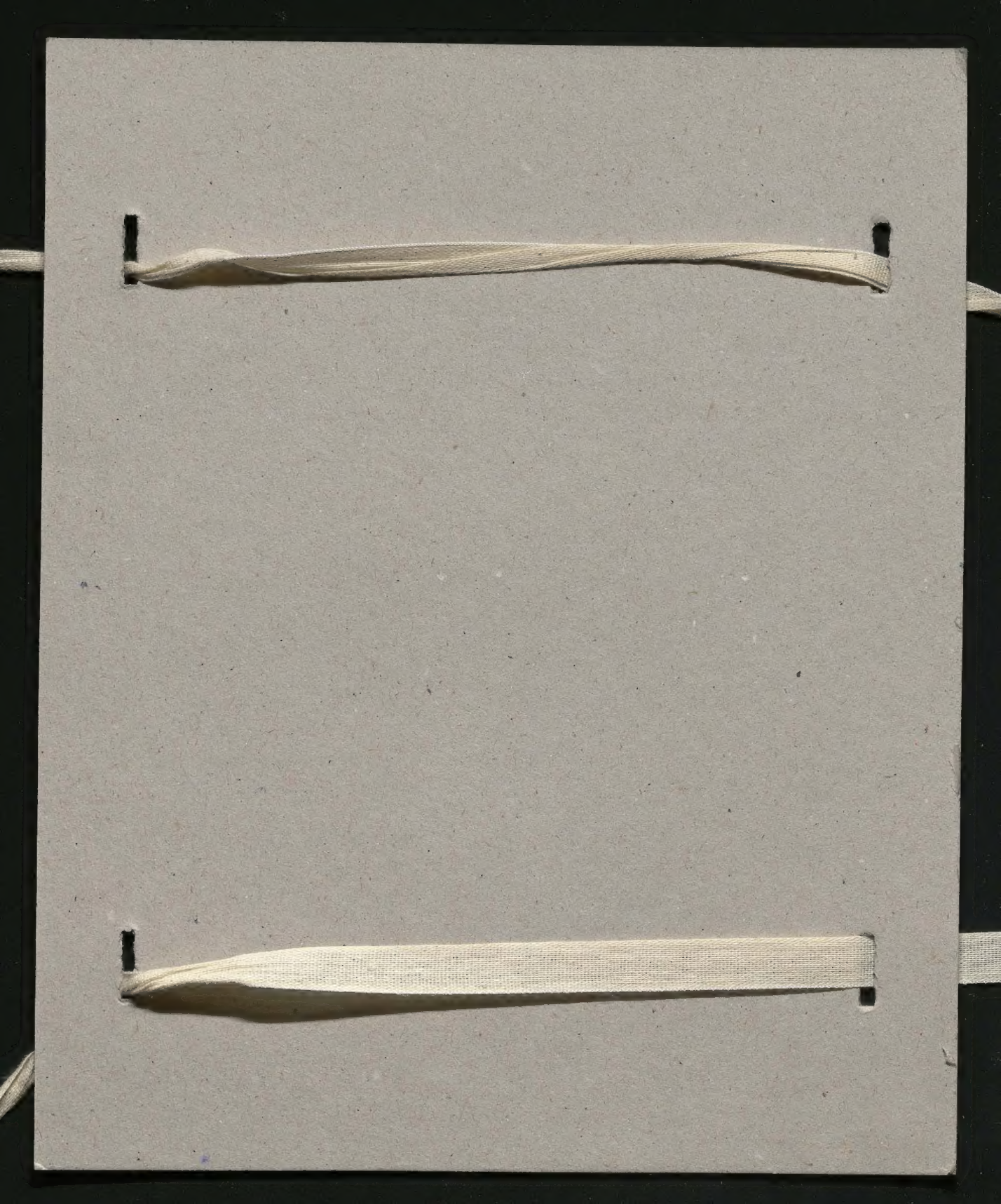


9386

Bibl. Jag.

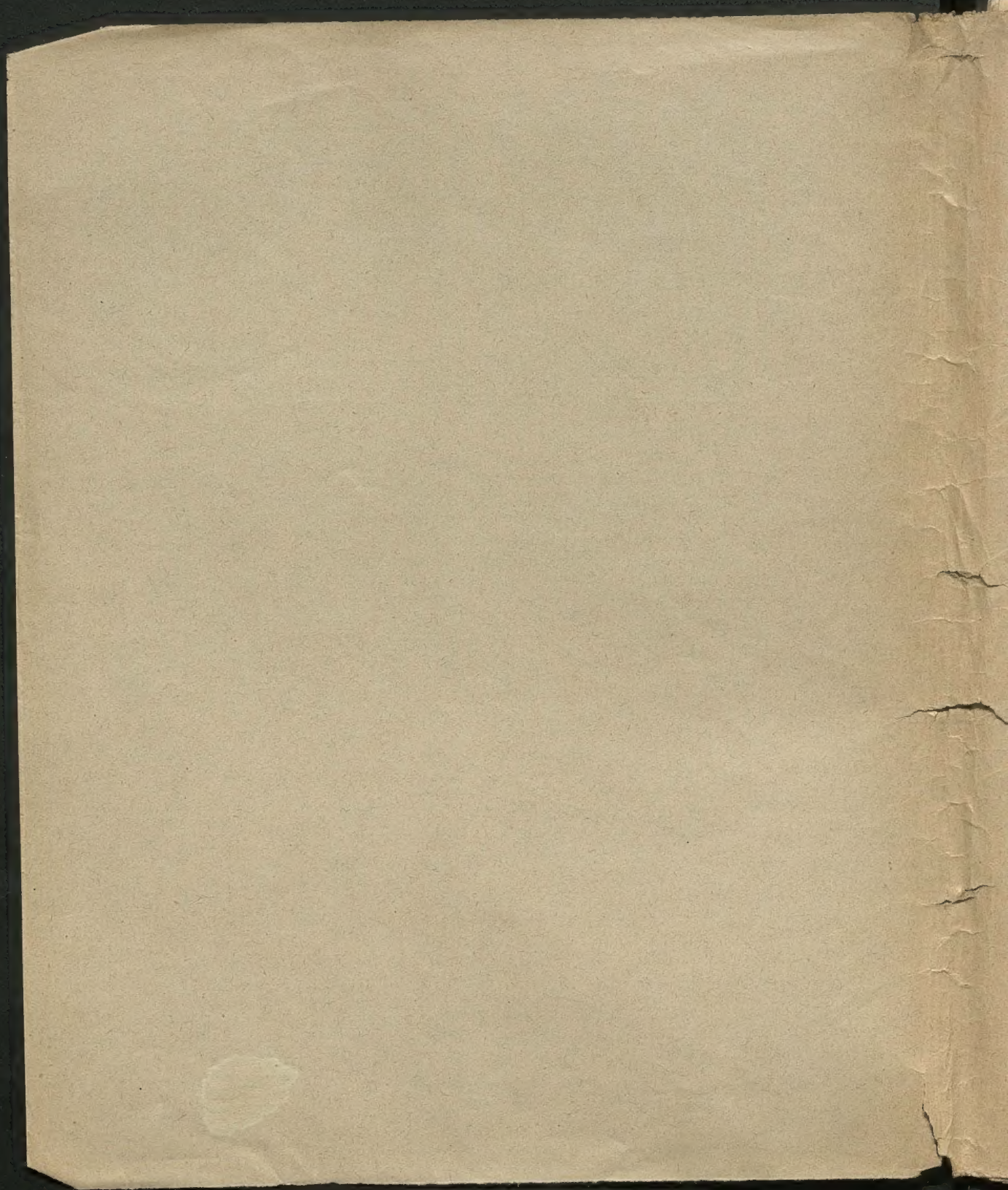
II



III 7

Geometrya analityana

Zimae 1899/1900



2

Co to jest geometria euklidesowa, Panowie i tak wszyscy wiadomo, wrok
Panowie ~~przebiegający~~ ^{przebiegający} zakresu pierwszych ~~teorii~~ ^{teorii} ~~elementów~~ ^{elementów} ~~pierwszego~~
elementu tej umiejętności. Geom. euklidesowa (tróźnie się o geometrię syntetyczną
(d. j. geometrię na sposób Euklidesa) nie rezultatami i nie przedmiotami
te są takie same w obu wypadkach — tylko metody. Podzes gdy geo.
syntetyczna ^{zbudowana jest na} ~~wierze~~ ^{zawiera} rozumowania pośrednich ~~te~~ ^z ~~stwierdzenie~~ ^{stwierdzenie} ulicznych
w pewnym systemie, ~~które~~ ^{które} ~~hasła~~ ^{hasła} ~~wierzenia~~ ^{wierzenia} symbolów i metod rachunku algebraicznego
to precyzyjnie ~~istota~~ ^{istota} geometrii euklidesowej ~~jest to~~ ^{polysygn}, że problem o geometrii
zostaje ^{z pomocą wprowadzenia współrzędnych} przeniesiony przez problemat algebraiczny, do którego możemy
zastosować wszystkie metody algebry, a których jest nam wiele bogactwo, i
z rezultatów osiągniętych z pomocą rachunku dopiero znów ^{odpowiednie} ~~napowrót~~
wyciągamy wnioski geometryczne. Która metoda praktyczniejsza jest, tego
nie można z góry oświadczyć, to zależy od problematu, ale w każdym
razie geom. euklidesowa ma to za sobą, że jest więcej systematyczna i że ^{można} ~~dokładnie~~
~~zastosować~~ ^{zastosować} ~~bezporednię~~ ^{bezporednię} n. p. w fizyce, podczas gdy f. synt. pod tym
względem wielkie przedstawiały trudności. Trzeci jest to pojęcie i
miejscu ~~głównie~~ ^{głównie} ~~wprawy~~ ^{wprawy}, n. p. ~~Anglii~~ ^{Anglii} ~~mają~~ ^{mają} ~~sukcesywnie~~ ^{sukcesywnie} ~~upodobanie~~ ^{upodobanie} o metodach
geometrii syntetycznej i wiele u nich są bogactwa niż my; z tego powodu
~~które~~ ^{które} ~~nam~~ ^{nam} ~~w porównaniu~~ ^{w porównaniu} ~~tak trudno~~ ^{tak trudno} ~~jest~~ ^{jest} ~~rozumieć~~ ^{rozumieć} n. p. rozprawy ^{francuskie} ~~angielskie~~.
Właśnie ~~głównym~~ ^{głównym} przedmiotem naszego kursu ma być geometria euklidesowa
przestrzeni — i ona też jest najogólniejsza, która obejmuje ~~wszystkie~~ ^{wszystkie} inne jako

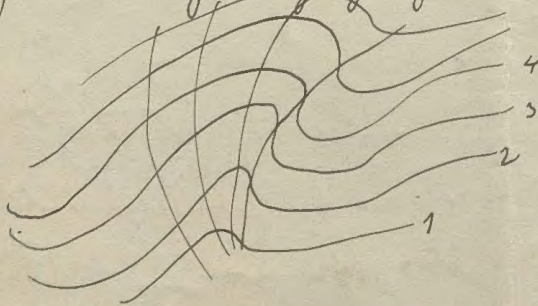
specjalne przypadki, ale ze względu praktycznych rozporozczeń najprzód
 geometryę płaską, z której w przedkroci ~~po~~ rozporozczeniu się z najwcześniejszymi
 wyświadczeniami, ~~aby potem między~~ to nam ułatwi potem bardzo geometryę
 przestrzeni, która jest całkiem analogiczna. ~~Ważne~~

Geometryę płaską jest znów stosownie tylko przypadkiem szczególnym
 geometryi powierzchniowej. Moimaby np. tak samo także badać
 właściwości krzywych na kuli i utworzyć geometryę kulistą — trygono-
 metryę sferyczną tworzyłaby wtedy część tej geometryi kulistej. Albo
 geometryę eliptyczną i t.p. Naturalnie iadną z nich tej własności nie
 posiadałaby i nie byłaby tak proste jak własności geometryę figur układowych
 płaskich.

Najlepiej rozpoznaniem rodzaju pro. płaskiej jest ten sposób punkt każdy
 oznacza się rozporozczeniem dwóch współrzędnych. Na jest to koniecznie iz dwo-
 kosmymi białymi północy np. także współrzędne t.j. liniowe, gdzie proste
 oznacza się, dwoje współrzędnych a ~~to~~ punktem przez równanie możemy rozumieć.

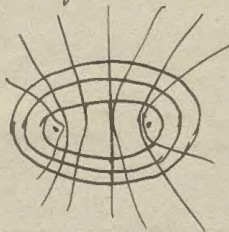
Współrzędne ~~na~~ które mają służyć do oznaczenia punktu mogą być proste
 lub krzywe linii najróżniejszych gatunków.

N. p.



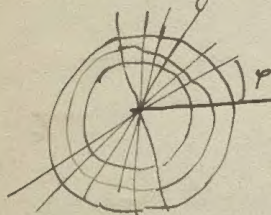
dwie systemy
 jeżeli mamy ~~się~~ krzywych
 tego rodzaju, w których każdej
 krzywej odpowiada pewnej liczbie
 to jest precyzyjnie oznacza punkt, i
 wartości tych linii = współrzędne.

Jakiego rodzaju krzywe się odnosi do linii od natury problematycznej i nie są
 równie niepraktycznymi jak współrzędne proste. N.p. we fizyce przy niektórych
 zadaniach odnoszących się do potencjału elipsoidalnego wynika się z. z. współrzędne
 eliptyczne

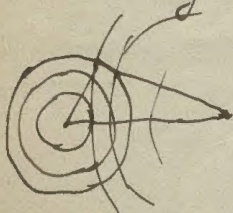


W innych wypadkach odnoszących się do
~~ist~~ ~~na~~ kontektu obrotu ~~względ~~ bardzo
 praktyczne są współrzędne "toroidalne" etc.

Wskazując na to nie innego jak system prostych i kół koncentrycznych
 Jeśli środek jest ustanowiony, to potrzebujemy jedynie
 tylko odległości r aby znaleźć pewne kół, i kąt φ
~~aby znaleźć~~ rachowany od pewnego promienia zero, aby
 znaleźć punkt prostej. Te dwa współrzędne r, φ określają punkt gdzie
 one się przecinają.

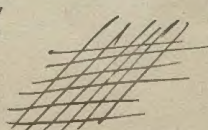


Wówczas inny system: ~~podwójny~~ ^{dwu} promienny (bipolar)



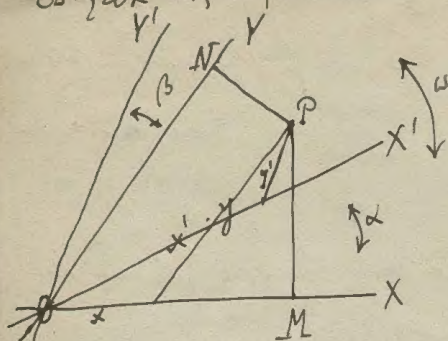
$r_1 \quad r_2$

Jeżeli promienie kół stają się nieskończenie wielkie; ~~natomiast~~ ^{toż samo toż} ~~ist~~ ~~na~~ ~~odległości~~ ~~ist~~ ~~na~~ ~~odległości~~
 to kół zaniżają się w proste i otrzymany zwykły system dwupromienny
 współrzędnych prostych



i ten model niegdyś używany się
 rozwinął.

Złazek między różnymi systemami współrzędnych prostych, przekształcenie.



$$y \sin \omega = x' \sin \alpha + y' \sin(\omega + \beta)$$

$$x \sin \omega = x' \sin(\omega - \alpha) - y' \sin \beta$$

$$\text{rotacja } y$$

Jżeli jemu przekształć współrzędnych przesunąć a, b

$$\text{to } y = b + \frac{x' \sin \alpha + y' \sin(\omega + \beta)}{\sin \omega}$$

$$x = \dots$$

Też naturalnie przesunąć sobie nie potrzeba, rezultat wsiągnąć tylko ten,

że x, y = funkcje liniowe (pierwszego stopnia) x', y' i odwrotnie
Z tego dalej wynika że stopień równania $F(x, y) = 0$ nie zmienia
się przez przejście do innego układu współrzędnych prostych, tylko stale
wielkości otrzymują inne wartości. $F(a + a'x' + a''y'', b + b'x' + b''y'') = 0$
Z tego już wynika, że to co prawdziwym stanowi charakter przegwi jest
stopień tej równania.

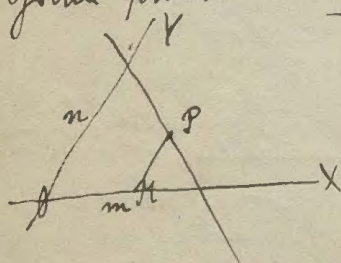
Równanie pierwszego stopnia = prosta.

Ogólna forma: $Ax + By + C = 0$ Pokazujemy że to da się przekształcić

potrzebne tylko dwie stałe m, n

$$y : n = m - x : m$$

$$\frac{y}{n} = \frac{m-x}{m} = 1 - \frac{x}{m} \quad \text{wzr} \quad \frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1$$



Równanie symetryczne (krośniak)

A tu to formę ogólną można przekształcić ogólną formę dzięki przez C:

$$\left(-\frac{x}{A}\right) + \left(-\frac{y}{B}\right) = +1$$

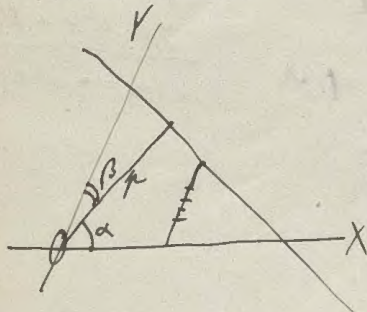
$$-\frac{C}{A} \text{ i } -\frac{C}{B} \text{ są odcięzami } m, n$$

Jaki $C=0$ study $\frac{y}{x} = -\frac{A}{B}$ wz - prosta przez punkt $(0, -\frac{A}{B})$
 $A=0$ } równoległa z OX
 $D=0$ }

Forma mianowa:

$y = ax + b$ | Jaki $\omega = 90^\circ$ $a = \tan \alpha$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = a = \frac{y \cdot p}{x \cdot p}$

Forma normalna



prosta jest zawsze jakiś ramy n.p. p i α więc musi być możliwość przez nie wyrazić równanie

$m = \frac{1}{\cos \alpha}$ $n = \frac{1}{\sin \beta}$

$x \frac{\cos \alpha}{p} + y \frac{\sin \beta}{p} = 1 \quad \Rightarrow \quad x \cos \alpha + y \sin \beta - p = 0$

Wzrosty jeżeli $\omega = 90^\circ$: $\beta = 90^\circ - \alpha$

$x \cos \alpha + y \sin \beta - p = 0$

Wzrosty w przypadku trygonometrycznym: $\omega = (\varphi - \alpha) = p$

Jak przekształcić ogólną formę na formę normalną?

$Ax + By + C = 0$

$x \cos \alpha + y \sin \beta - p = 0$

$\lambda A = \cos \alpha$

$\lambda B = \sin \beta$

$\lambda C = -p$

$\lambda = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

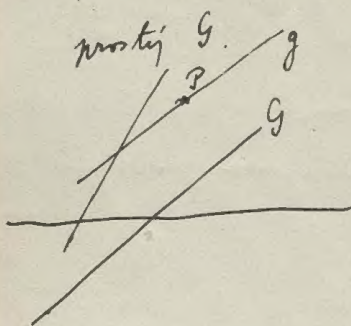
$\cos \alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ $\sin \beta = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ $-p = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

$\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} x + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} y + \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 0$

(problem i uogólnienie wyrażenia)

Tam pewnie prosta była określona przez m, n lub a, b lub p, q , więc musimy być dane 2 warunki

n.p. Prosta przechodząca przez punkt x_1, y_1 i ~~podległa~~ równoległa do



$$g \dots Ax + By + C = 0$$

$$g \parallel g' \dots A'x + B'y + C' = 0$$

$$\frac{A}{B} = \frac{A'}{B'} \quad \text{tzn}$$

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \lambda$$

$$\begin{array}{l} y = ax + b \\ y = ax + b' \\ y_1 = ax_1 + b' \\ \hline y - y_1 = a(x - x_1) \end{array}$$

$$A' = \lambda A$$

$$\lambda Ax + \lambda By + C' = 0$$

$$Ax + By + \frac{C'}{\lambda} = 0$$

$$Ax_1 + By_1 + \frac{C'}{\lambda} = 0$$

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0$$

Podobnie: prosta przechodząca przez pewien punkt i tworząca pewien kąt z inną prostą. N.p. jeżeli \perp to $\frac{A}{B} = -\frac{B'}{A'}$ etc

Prosta przechodząca przez 2 punkty

$$y = ax + b$$

$$y_1 = ax_1 + b$$

$$y_2 = ax_2 + b$$

$$\left. \begin{array}{l} y_1 = ax_1 + b \\ y_2 = ax_2 + b \end{array} \right\} \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = a$$

$$b = y_1 - ax_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{x_1 - x_2}$$

$$y = \frac{(y_1 - y_2)x + x_1 y_2 - x_2 y_1}{x_1 - x_2}$$

Wzr. warunk. żeby 3 punkty leżały w prostej:

$$(x_2 y_1 - x_1 y_2) + (x_1 y_2 - x_2 y_1) + (x_2 y_1 - x_1 y_2) = 0$$

Amort prędkości dwóch punktów

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 = 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 = 0 \end{cases}$$

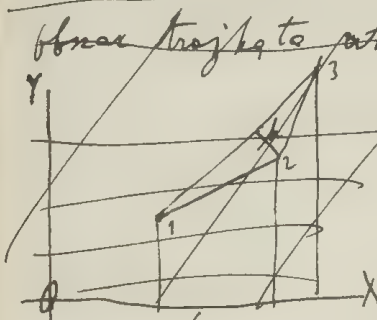
$$x = \frac{B_1 C_2 - B_2 C_1}{A_1 B_2 - A_2 B_1}$$

$$y = \frac{A_2 C_1 - A_1 C_2}{A_1 B_2 - A_2 B_1}$$

jeżeli punkt się równoległy to jak prędkość ułożenia: $A_1 \neq A_2$

$$\frac{B_1}{A_1} = \frac{B_2}{A_2} \quad \begin{matrix} \text{zatem} \\ x = \infty \\ y = \infty \end{matrix}$$

Obraz trójkąta utworzonego przez 3 punkty



$$= \frac{1}{2} \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2}$$

Ostrzyżenie prostokątny 2 punktu na prostą = odległość

$$g: x \cos \alpha + y \sin \beta - p = 0$$

$$g: x_1 \cos \alpha + y_1 \sin \beta - p_1 = 0$$

$$P_1 g = p_2 - p_1 = \dots$$

$$p - x_1 \cos \alpha - y_1 \sin \beta$$

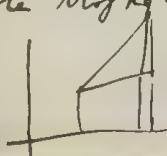
$$= -(x_1 \cos \alpha + y_1 \sin \beta - p)$$

Zatem otrzymujemy się odległość punktu od prostej wstawiając wartości numeryczne punktu w równanie normalnej tej prostej.

Jeżeli więc $\omega = \frac{\pi}{2}$ $Ax + By + C = 0$

$$= \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Tak trójkąta



$$= \frac{1}{2} [(y_1 + y_3)(x_3 - x_1) - (y_1 + y_2)(x_2 - x_1) + (y_2 + y_3)(x_3 - x_2)]$$

$$= \frac{1}{2} [(y_1 x_3 - y_3 x_1) + (y_2 x_1 - y_1 x_2) + (y_3 x_2 - y_2 x_3)]$$

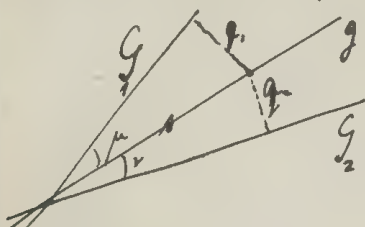
Tak samo: $z \pm h$

$$= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

Wzr. do warunk. żeby 3 punkty leżały na jednej prostej równy ze $\Delta = 0$.

0 wpasujemy koch!

Równanie prostej przechodzącej przez punkt przecięcia dwóch prostych



$$g_1 \quad x \cos \alpha_1 + y \sin \beta_1 - p_1 = 0$$

$$g_2 \quad x \cos \alpha_2 + y \sin \beta_2 - p_2 = 0$$

$$\frac{p_1}{r} = \sin \mu$$

$$\frac{p_2}{r} = \sin \nu$$

$$\frac{\sin \mu}{\sin \nu} = \frac{p_1}{p_2} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \quad g_1 = x \cos \alpha_1 + y \sin \beta_1 - p_1$$

$$g_2 = x \cos \alpha_2 + y \sin \beta_2 - p_2$$

$$g_1 = \lambda g_2$$

$$g_1 - \lambda g_2 = 0$$

$$\underbrace{x \cos \alpha_1 + y \sin \beta_1 - p_1}_{\equiv g_1} - \lambda \underbrace{(x \cos \alpha_2 + y \sin \beta_2 - p_2)}_{\equiv g_2} = 0$$

$$g_1 - \lambda g_2 = 0$$

λ nazwany *podzielnikiem* *podzielnika*;

Jżeli we formie

$$A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$$

$$A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$$

$$\frac{A_1 x + B_1 y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} - \lambda \frac{A_2 x + B_2 y + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} = 0$$

$$\frac{g_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} - \lambda \frac{g_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} = 0$$

Jżeli mamy dwie proste

$$g_1 - k g_2 = 0$$

$$i \quad g_1 + k g_2 = 0$$

to nazwany je *harmonizacją* albo *harmonizacją* *zgodnie*

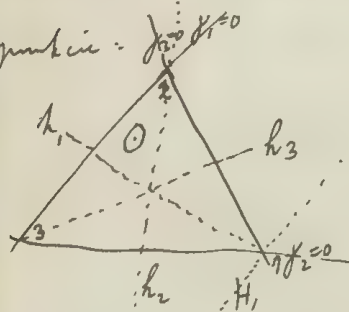
Je to przedstawienie prostej takiej
widerunek z tego że równanie I stopnia
a jeżeli $p=0$ to równanie $p=0$
niech odległość od początku punktu 0: jeżeli $p=0$
 $p \neq 0$

uśredniając nam równie wartości
utrzymujemy prostą prostych

Tem sposobem wyznaczenia równań pomocniczych symbolami skracającymi skorzystał nadzwyczaj praktycznie n.p.:

= dozwolanie kątów

Dozwolanie jest proste dzieląc na równie wysokości kąty trójkąta zmieniając się w jedną punkcie - $f_1 \neq 0$



$$h_3 \dots f_1 - f_2 = 0$$

$$h_1 \dots f_2 - f_3 = 0$$

$$f_1 - f_3 = 0$$

zatem punkt przecięcia dwóch
wysokości równa się $f_1 - f_3 = 0$
co jest równaniem h_2

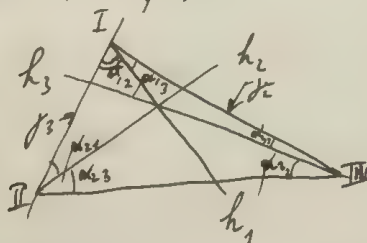
Tak samo: co do kątów równoległych.

$$H_1 \dots f_2 + f_3 = 0$$

$$H_3 \dots f_1 + f_2 = 0$$

$$f_1 - f_3 = 0 \dots h_2$$

Dzielenie punktów:



$$\sin \alpha_{12} : \sin \alpha_{13} =$$

$$\sin \alpha_{13} : \sin \alpha_{12} = m_3 : m_2$$

$$\sin \alpha_{21} : \sin \alpha_{23} = m_1 : m_3$$

$$\sin \alpha_{32} : \sin \alpha_{31} = m_2 : m_1$$

przechodząc się
do jednego punktu

$$h_1 \dots f_2 - \frac{\sin \alpha_{13}}{\sin \alpha_{12}} f_3 = 0 \equiv f_2 - \frac{m_3}{m_2} f_3 = 0 \parallel m_2 f_2 - m_3 f_3 = 0$$

$$h_2 \parallel m_3 f_3 - m_1 f_1 = 0$$

$$m_2 f_2 - m_1 f_1 = 0 \equiv h_3$$

zatem ...

(Zgodnie z Δ^3 i ich własnościami dozwolanie
dokładnie tylko dwa równania, ponieważ $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 180^\circ$
co $\sin \alpha_1 : \sin \alpha_2 : \sin \alpha_3 = m_1 : m_2 : m_3$)
[prezentacja punktów $m_1 : m_2 : m_3$]

opisni rezultat želiš namy 3 prate:

$$f_1 = 0$$

$$f_2 = 0$$

$$f_3 = 0$$

to pomeni, da smo v želeni punkciji želiš, dodaj naš rezultat
3 enačbe

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = 0 \quad (\text{da hodi na } x, y)$$

ko želiš f_1 i $f_2 = 0$ to ugotoviš i $f_3 = 0$

Tak samo da opisni formo:

$$g_1 = 0$$

$$g_2 = 0$$

$$g_3 = 0$$

$$\text{želiš } \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \lambda_3 g_3 = 0$$

N.p.

$$g_1 \dots 2x + 5y - 7 = 0$$

$$g_2 \dots x - 2y + 8 = 0$$

$$g_3 \dots x + y + \frac{1}{3} = 0$$

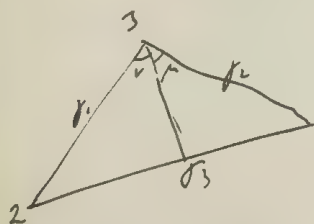
$$\lambda_1 = +1$$

$$\lambda_2 = +1$$

$$\lambda_3 = -3$$

$$x(2+1-3) + y(5-2-3) + (-7+8-1) = 0$$

Podobno: 3 prate in 2 kotov na preostali točki praviš i v 1 punkciji



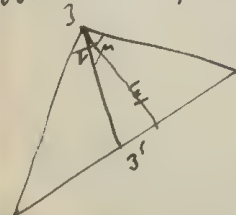
$$\sin \mu = \sin \nu = \sin \alpha_1 : \sin \alpha_2$$

$$h_3: f_2 - \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} f_1 = 0 \quad \dots \quad f_2 \sin \alpha_2 - f_1 \sin \alpha_1 = 0$$

$$h_3: f_3 \sin \alpha_3 - f_2 \sin \alpha_2 = 0$$

$$f_3 \sin \alpha_3 - f_1 \sin \alpha_1 = 0 \quad \dots \dots = h_2$$

Podobno 3 prate določa preostali točki na ravni
užni



$$\sin \mu : \sin \alpha_1 = \overline{13'} : \overline{33'}$$

$$\sin \nu : \sin \alpha_2 = \overline{23'} : \overline{33'}$$

$$\left. \begin{aligned} \sin \mu : \sin \alpha_1 &= \overline{13'} : \overline{33'} \\ \sin \nu : \sin \alpha_2 &= \overline{23'} : \overline{33'} \end{aligned} \right\} \sin \mu = \sin \nu = \sin \alpha_1 : \sin \alpha_2$$

$$\text{zato } h_3 \dots f_1 \sin \alpha_1 - f_2 \sin \alpha_2 = 0$$

Jżeli mamy 3 ogólne równania

$$\left. \begin{aligned} G_1 &= A_1 x + B_1 y + C_1 = 0 \\ G_2 &= A_2 x + B_2 y + C_2 = 0 \\ G_3 &= A_3 x + B_3 y + C_3 = 0 \end{aligned} \right\}$$

to ^{wygląd} nie zdecydowały mogli określić 3 punkty w których
 K_1, K_2, K_3 żeby było spełnione równanie

$$K_1 G_1 + K_2 G_2 + K_3 G_3 = 0$$

(dla wszystkich x, y)

bo to wymagałoby

$$A_1 K_1 + A_2 K_2 + A_3 K_3 = 0$$

$$B_1 K_1 + B_2 K_2 + B_3 K_3 = 0$$

$$C_1 K_1 + C_2 K_2 + C_3 K_3 = 0$$

to nie można rozwiązać wtedy K_1, K_2, K_3

bo mamy tu 3 równania na stałe

$$\frac{K_1}{K_3} \quad \text{ i } \quad \frac{K_2}{K_3}$$

Takie 3 proste które nie będą się przecinały w 1 punkcie, bo x, y wyznaczone z dwóch nie będą spełniały 3 ej.

Można jednak w tym wypadku wyrazić równanie 4 tej prostej G jako sumę
 $G \equiv K_1 G_1 + K_2 G_2 + K_3 G_3$ (dla wszystkich x, y)

bo wtedy mamy $A_1 K_1 + A_2 K_2 + A_3 K_3 = A$

B

C

wtedy mamy dependence 3 równania

z 3 niewiadomymi a które

można rozwiązać

Tylko w pewnym wypadku mogą być one 3 równania rozwiązać t.j.

jeżeli ~~$C_1 = A_1 + \lambda B_1$~~ ~~$C_2 = A_2 + \lambda B_2$~~ ~~$C_3 = A_3 + \lambda B_3$~~

$A_3 = A_1 + \lambda A_2$ $B_3 = B_1 + \lambda B_2$ $C_3 = C_1 + \lambda C_2$

bo wtedy ~~$G_3 \equiv G_1 + \lambda G_2$~~ $G_3 \equiv G_1 + \lambda G_2$

~~zatem $K_1 G_1 + K_2 G_2 + K_3 G_3$~~ więc jeżeli się zrobi K_1 dowolne $K_2 = \lambda K_1$
 $K_3 = -K_1$

Wzrosty

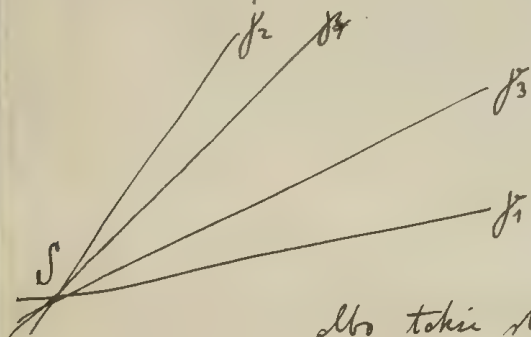
$$\begin{aligned} \kappa_1 S_1 + \kappa_2 S_2 + \kappa_3 S_3 &\equiv \kappa_1 S_1 + \kappa_2 S_2 + \kappa_3 (S_1 + \lambda S_2) \\ &\equiv \kappa_1 S_1 + \kappa_1 \lambda S_2 + \kappa_3 (S_1 + \lambda S_2) \\ &\equiv 0 \end{aligned}$$

a dla warunków $S_3 \geq S_1 + \lambda S_2$ znany stał się że wtedy nasz ~~nowy~~ punkt przechodzi przez punkt przecięcia prostych S_1 i S_2

Wtedy jednak równania swobodnej prostej naturalnie nie możemy przedstawić już w formie $S \equiv \kappa_1 S_1 + \kappa_2 S_2 + \kappa_3 S_3$

bo chcąc wyznaczyć wartości $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ zobowiązujemy że te wartości nie muszą sumować się do zera.

Przechodzimy teraz do nowego pojęcia



$$f_3 \equiv f_1 - \lambda f_2$$

$$f_4 \equiv f_1 - \mu f_2$$

Doppelverhältnis

stosunek $\frac{\lambda}{\mu}$ narysowany stosunek podwójnego podziału k_9 k_{10} $f_1 f_2$

lub także sto. p. p. przekształcając promienie $f_1 f_2 f_3 f_4$

$$= (f_1 f_2 f_3 f_4) = \frac{\sin f_1 \wedge f_3}{\sin f_3 \wedge f_2} : \frac{\sin f_1 \wedge f_4}{\sin f_4 \wedge f_2}$$

także w innych formach

$$= \frac{\sin f_4 \wedge f_2}{\sin f_3 \wedge f_2} : \frac{\sin f_1 \wedge f_4}{\sin f_1 \wedge f_3} = \left(\frac{\mu \sin f_4 \wedge f_2}{-\sin f_3 \wedge f_2} : -\frac{\sin f_4 \wedge f_1}{\sin f_1 \wedge f_3} \right) = (f_4 f_3 f_2 f_1) \text{ etc}$$

Takie zbiory punktów nie są dane w formie normalnej ani ogólnej.

$$G_3 \equiv G_1 - \lambda G_2$$

$$G_4 \equiv G_1 - \mu G_2$$

to stromek $\frac{\lambda}{\mu}$ oznacza stromek podziętego podziału

$$= \frac{\sin G_1 \sin G_3}{\sin G_3 \sin G_2} : \frac{\sin G_1 \sin G_4}{\sin G_4 \sin G_2}$$

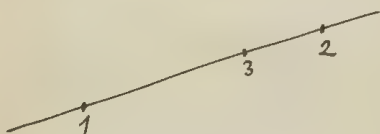
$$\text{bo } \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\sin G_1 G_3}{\sin G_3 G_2} \cdot \frac{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$$

$$\text{a tak samo: } \mu = \frac{\sin G_1 G_4}{\sin G_4 G_2} \sqrt{\frac{A_1^2 + B_1^2}{A_2^2 + B_2^2}}$$

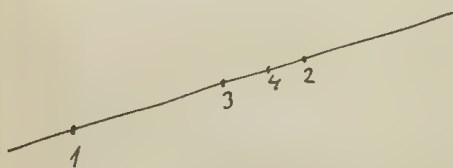
$$\left. \begin{aligned} \frac{\lambda}{\mu} &= \frac{\sin G_1 G_3}{\sin G_3 G_2} : \frac{\sin G_1 G_4}{\sin G_4 G_2} \end{aligned} \right\}$$

Określenie promieni

sekrety punktów = punktów leżących na prostej = podziału



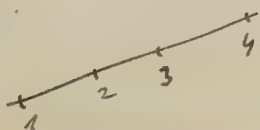
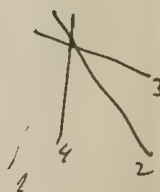
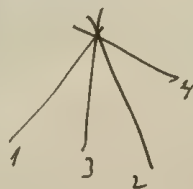
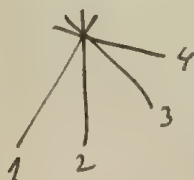
stromek odległości $\frac{13}{12}$ narysowany stromkiem podziału = 1



$$\text{stromek } \frac{13}{12} : \frac{14}{12} = \frac{\lambda}{\mu}$$

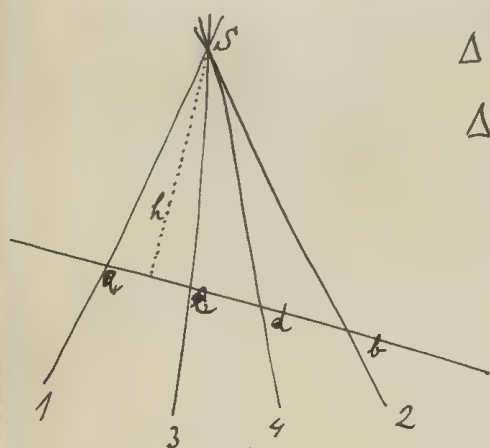
narysowany ~~podział~~ A. 7. 7.

Tak jak tutaj narysowany b.d. to A. 7. 7. +



zbiór = -1 to „podział harmoniczny”

Constructivnyj rysek promieni ~~pr~~ jakoś będe proste (Pappus)



$$\Delta a S d = h \overline{ad} = \overline{aS} \overline{Sd} \sin \angle a S d$$

$$\Delta d S b = h \overline{db} = \overline{dS} \overline{Sb} \sin \angle d S b$$

$$\frac{\overline{ad}}{\overline{db}} = \frac{\overline{aS}}{\overline{Sb}} \frac{\sin \angle a S d}{\sin \angle d S b}$$

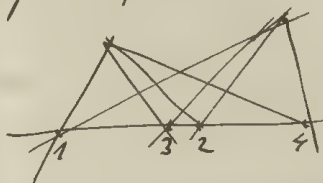
$$\text{toż samo: } \frac{\overline{ac}}{\overline{cb}} = \frac{\overline{aS}}{\overline{Sb}} \frac{\sin \angle a S c}{\sin \angle c S b}$$

$$\text{Więc: } \frac{\overline{ad}}{\overline{db}} : \frac{\overline{ac}}{\overline{cb}} = \frac{\sin \angle a S d}{\sin \angle d S b} : \frac{\sin \angle a S c}{\sin \angle c S b}$$

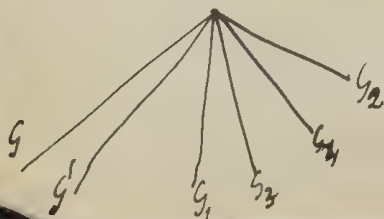
Jeżeli prostymi a, ... - poprzecznymi
stosunek podw. podw. promieni = st. p. p. punktów przeciwieństwa

Więc w p. jeżeli 4 promienie harmoniczne to każdy ~~z nich~~ poprzeczna
przecina je w punktach harmonicznie sprzężonych

albo jeżeli mamy 4 harmoniczne punkty to każdy rysek promieni
na nich utworzony = harmoniczny



Az dotąd uwielbiamy równanie dwóch promieni fundamentalnych jako
dane a inne przez nie wyrażone. Jeżeli zaś mamy 4 wyrażone przez 2 inne,



$$\left. \begin{aligned} g_1 &\equiv g - \lambda_1 g' = 0 \\ g_2 &\equiv g - \lambda_2 g' = 0 \\ g_3 &\equiv g - \lambda_3 g' = 0 \\ g_4 &\equiv g - \lambda_4 g' = 0 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} g' &= \frac{g_1 - g_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \\ g &= \frac{\lambda_2 g_1 - \lambda_1 g_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \end{aligned} \right\}$$

Wskazane pola geometryjnej prostej są figurami utworzone przez proste lub przez punkty i tem zastawiają się te pojęcia. Ograniczamy się na najprostszą postać.

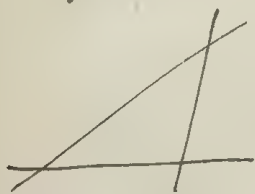
Figury zupełne

N bok zupełny = ~~figur~~
 zbiór n prostych, które będą
 się przecinały w $\frac{n(n-1)}{2}$ punktach)

Dwój bok



Trój bok



to są takisane
 (inne nie)

N kąt zupełny =

zbiór n punktów (które można
 połączyć ze sobą przez $\frac{n(n-1)}{2}$ ~~proste~~
 przekątne)

Dwój kąt



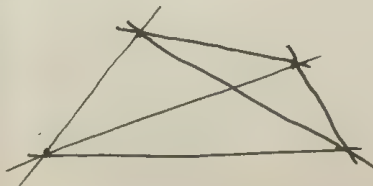
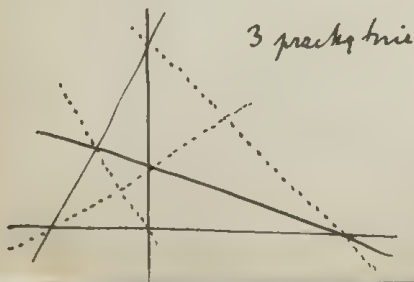
Trój kąt



Wskazano tu tylko jeden przykład (dokładnie przecinające się w jednym punkcie etc.)

Czworobok

Czworokąt



$$G_3 \equiv \frac{\lambda_2 G_1 - \lambda_1 G_2 - \lambda_3 G_1 + \lambda_3 G_2}{\lambda_2 - \lambda_1} = 0$$

$$G_1 - \frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_2 - \lambda_3} G_2 = 0$$

$$\lambda = \frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_2 - \lambda_3}$$

G_1

G_2

$$G_3 \equiv G_1 - \lambda G_2$$

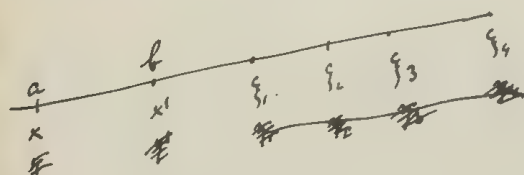
$$G_4 \equiv G_1 - \mu G_2$$

$$G_4 \equiv a_1 G_1 - \lambda_1 G_2 - \lambda_3 G_1 + \lambda_4 G_2 = 0$$

$$G_1 - \frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_2 - \lambda_4} G_2 = 0 \quad \mu = \frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_2 - \lambda_4}$$

$$(G_1, G_2, G_3, G_4) = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_2 - \lambda_3} : \frac{\lambda_1 - \lambda_4}{\lambda_2 - \lambda_4}$$

Tak samo 4 punkty wyznaczone przez dwa



$$(G_1, G_2, G_3, G_4) = \frac{\xi_3 - \xi_1}{\xi_3 - \xi_2} : \frac{\xi_4 - \xi_1}{\xi_4 - \xi_2}$$

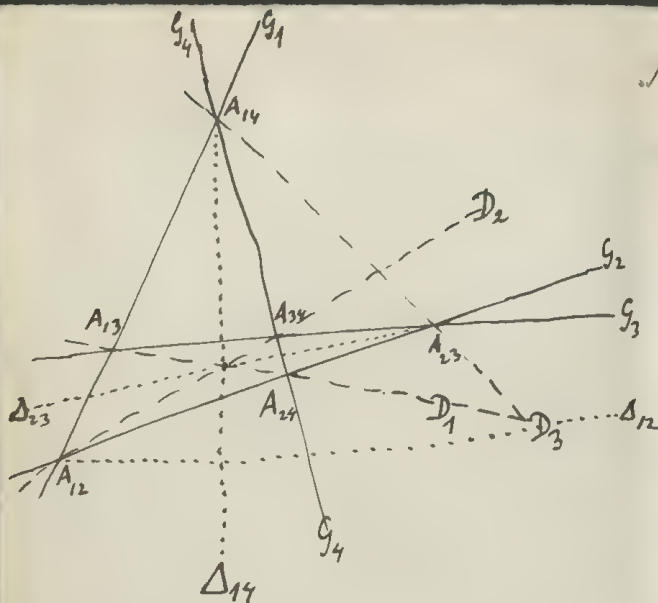
$$\frac{\xi_1 - x}{\xi_1 - x'} = \lambda_1$$

$$\xi_1 = \frac{x - \lambda_1 x'}{1 - \lambda_1} \quad \frac{\xi_3 - \xi_1}{\xi_3 - \xi_2} = \frac{\frac{x - \lambda_3 x'}{1 - \lambda_3} - \frac{x - \lambda_1 x'}{1 - \lambda_1}}{\frac{x - \lambda_3 x'}{1 - \lambda_3} - \frac{x - \lambda_2 x'}{1 - \lambda_2}} = \frac{x - \lambda_3 x' - \lambda_1 x + \lambda_1 \lambda_3 x' - x + \lambda_1 x'}{1 - \lambda_1} \cdot \frac{1 - \lambda_2}{1 - \lambda_3}$$

$$\frac{\xi_3 - \xi_1}{\xi_3 - \xi_2} = \frac{\lambda_3 - \lambda_1}{\lambda_3 - \lambda_2} \cdot \frac{1 - \lambda_2}{1 - \lambda_1} \quad \parallel \quad \frac{\xi_4 - \xi_1}{\xi_4 - \xi_2} = \frac{\lambda_4 - \lambda_1}{\lambda_4 - \lambda_2} \cdot \frac{1 - \lambda_2}{1 - \lambda_1}$$

$$\text{Zatem: } (G_1, G_2, G_3, G_4) = \frac{\lambda_3 - \lambda_1}{\lambda_3 - \lambda_2} : \frac{\lambda_4 - \lambda_1}{\lambda_4 - \lambda_2}$$

$$\text{Zużycie n.p. harmonicznych prowadzi do: } \frac{\lambda_3 - \lambda_1}{\lambda_3 - \lambda_2} = \frac{\lambda_4 - \lambda_1}{\lambda_4 - \lambda_2} = 0 \quad \text{nie!}$$



Najciekawsze właściwości:

W każdym wierzchołku mamy parę promieni harmonicznych, które utworzonych przez przekątną i pozostałą krawędź wierzchołka z punktami przecięcia dwóch przekątnych powstających trójkątów z dwoma bokami przystosowanymi punktów wierzchołka.

$$\text{N.p. } (g_1 \ g_4 \ \Delta_{14} \ D_3) = -1$$

$$\begin{aligned} D_2 &\equiv g_1 m_1 + g_2 m_2 \\ &\equiv g_4 m_4 + g_3 m_3 \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} g_1 m_1 - g_4 m_4 &\equiv g_3 m_3 - g_2 m_2 \equiv D_3 \\ g_1 m_1 - g_3 m_3 &\equiv g_4 m_4 - g_2 m_2 \equiv D_1 \end{aligned} \right\}$$

$$D_1 + D_2 \equiv g_1 m_1 + g_4 m_4 \equiv \Delta_{14}$$

$$D_1 - D_2 \equiv -g_2 m_2 - g_3 m_3 \equiv \Delta_{23}$$

$$D_1 + D_3 \equiv g_1 m_1 - g_2 m_2 \equiv \Delta_{12}$$

$$D_1 - D_3 \equiv g_4 m_4 - g_3 m_3 \equiv \Delta_{34}$$

$$D_1 + D_3 \equiv g_1 m_1 + g_3 m_3 \equiv \Delta_{13}$$

$$D_2 - D_3 \equiv g_4 m_4 + g_2 m_2 \equiv \Delta_{24}$$

Wz. m. p.



g_1

g_2

$$D_3 \equiv g_1 m_1 - g_4 m_4$$

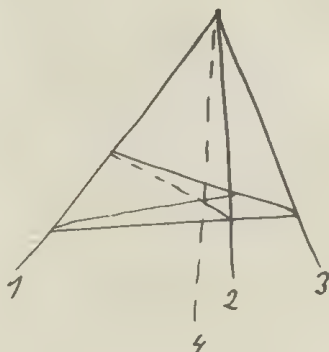
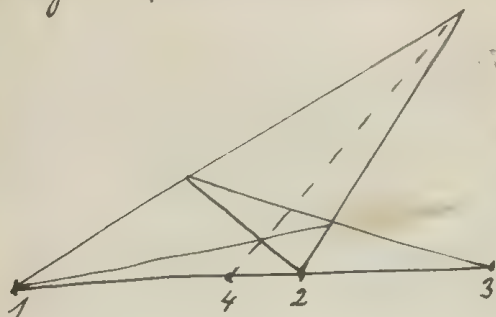
$$\Delta_{14} \equiv g_1 m_1 + g_4 m_4$$

Tak samo 2 przekątną z prostymi tworzą punkt przecięcia ich z krawędziami pozostałymi

$$(D_1 \ D_2 \ \Delta_{14} \ \Delta_{23}) = -1$$

$$\begin{array}{cc|c} D_1 & , & D_2 \\ D_1 + D_2 & , & D_1 - D_2 \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} \text{Takie 2 figury} \end{array} \right.$$

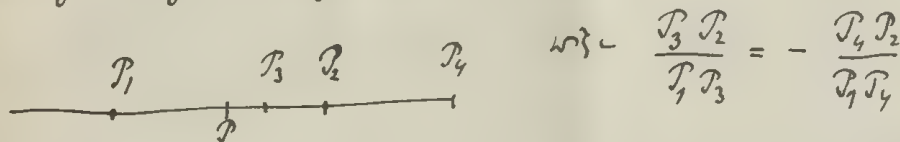
Z tego moż. duży się narysować prosty sposób wykreślenia czwartego punktu (pro.) harm.



$$14 : 42 = -(3 : 32) \\ = 13 : 23$$

Przejdziemy do nowego pojęcia : involucji par punktów lub promieni

Mamy cztery punkty harmoniczne



Tenże odległości Punkt P tak że $P_1 P = P P_2 = d$

$$P \cdot P_3 \equiv d_3$$

$$P \cdot P_4 \equiv d_4$$

$$\frac{P_3 P_2}{P_1 P_3} = \frac{d - d_3}{d + d_3} = + \frac{d_4 - d}{d + d_4}$$

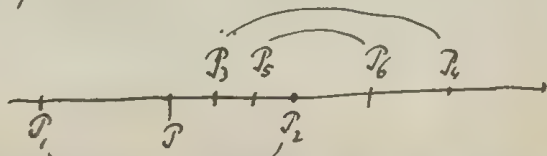
$$d^2 - d d_3 + d d_4 - d_3 d_4 = d d_4 - d^2 + d_3 d_4 - d d_3$$

$$d^2 = d_3 d_4$$

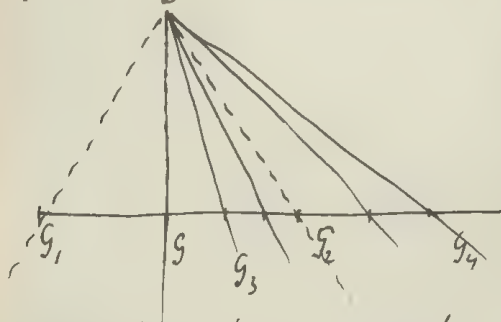
Jeżeli teraz odmierzymy jeszcze inne pary punktów P_5 i P_6 też harmoniczne do tych samych P_1, P_2 to będzie

$$d^2 = d_3 d_4 = d_5 d_6 = \dots$$

oczywiście to involucja : pary punktów P_3, P_4, P_5, P_6 też tworzą involucję i tenże



równanie stycznej do krzywej tego rodzaju. Jędrak involucji, punkty asymptotyczne
 Wykreśliwszy teraz pęk promieni nad temi punktami, tak że wierzchołek \perp
 nad P i S dzieląc tamto równanie przez $(GS)^2$



otrzymamy

$$(tg \angle G_1 S G)^2 = (tg \angle G_2 S G)^2 = tg \angle G_3 S G \cdot tg \angle G_4 S G = tg \angle G_5 S G \cdot tg \angle G_6 S G = \lambda^2$$

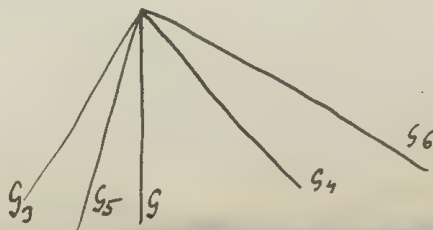
Jędrak tego równania zachodzi nad dwiema ^{parami} promieniami to mówimy że tworzą one
 involucję; $G = os$ involucji, G_1 i G_2 asymptotyczne.

~~Jędrak równania~~ Wskazujemy: promienie należące do jednej pary (inwolucyjnego
 pęku) są ze sobą harmonicznie sprzężone względem promieni asymptotycznych.

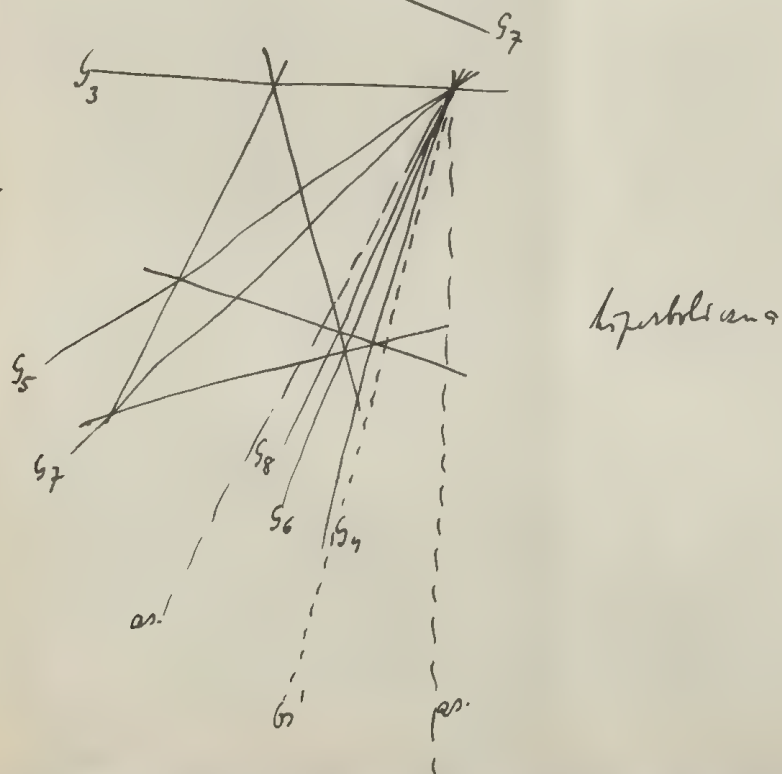
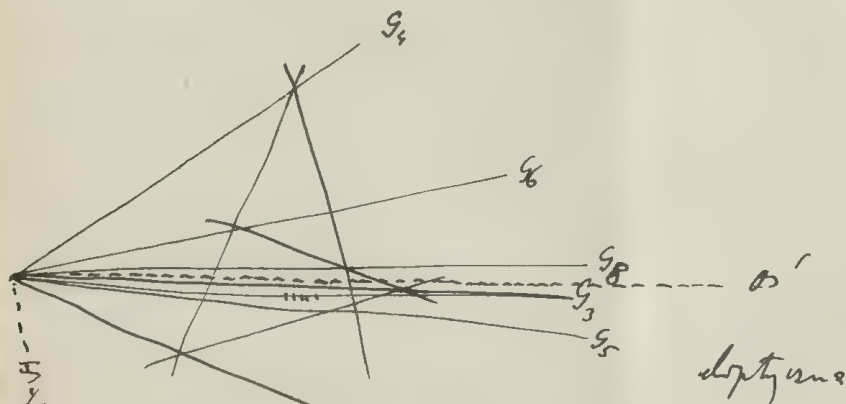
Nammy takie punkty przecięcia pęku involucyjnego z poprzecznym prostą adety
 do osi tworzą involucję, ale tak samo względem punktów przecięcia z jednakowymi
 poprzecznymi, bo będącymy między sobą w tej parze punktów harmonicznych do
 dwóch punktów asymptotycznych.

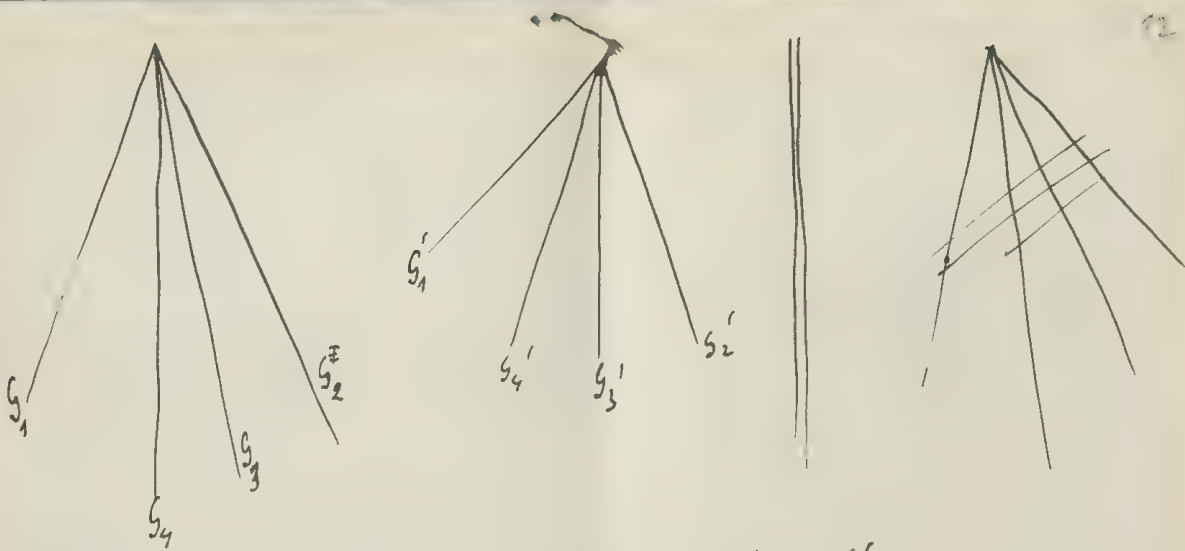
Tępo rodzaju involucję nazywamy hiperboliczną.

Wszystkie takie eliptyczne involucje A. j. takie gdzie λ^2 jest ujemne
 ujemną (zatem λ ujemne), tam promienie należące do każdej pary leżą z
 obu stron osi; tak samo punkty:



W dolnej części nie możemy się teraz wdać. Jako przykład przytoczymy
tylko bez dowodu:
Dany promień wychodzący z jakiegokolwiek punktu do ~~o~~ przemiętych wierzchołków
czworoboku tworzą inwolucję.





Jżeli $G_3 = G_1 - \lambda G_2$

$G_3' = G_1' - \lambda G_2'$

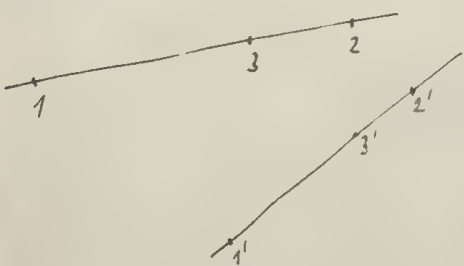
tożsamo $G_4 = G_1 - \mu G_2$

$G_4' = G_1' - \mu G_2'$ etc.

to narysany tożsaki jednostkieruwni (projectivisni)

a $G_3 \dots G_3'$, $G_4 \dots G_4'$ punktami odpowiednimi

Tożsame punkty



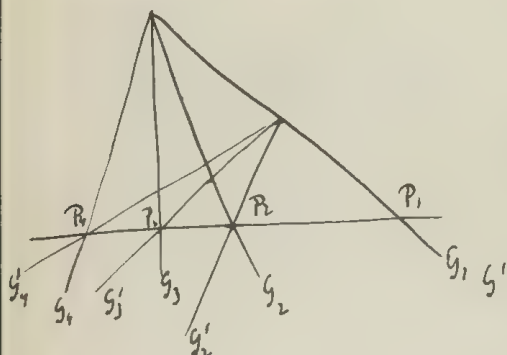
$\frac{12}{32} = \lambda$

$\frac{12'}{32'} = \lambda$

znowi jednostkieruwni

Jżeli żek S' toż obrócony ze G_1' równoległy z G_1 i znowem ~~toż~~
toż przesuniemy ze S' w jedną z G_1 to narysany tożsaki żeki perspektywizni
wż toż żeki żekowi żekowi dwa wierzchołki żek odpowiadzi samemu sobie.

Punkty przecięcia się promieni ^{opóźnionych} (perspektywnych) leżą na prostej



$$\frac{G_1' - G_2'}{G_3' - G_4'}$$

$$(G_1, G_2, G_3, G_4) = (P_1, P_2, P_3, P_4) = (G_1', G_2', G_3', G_4')$$

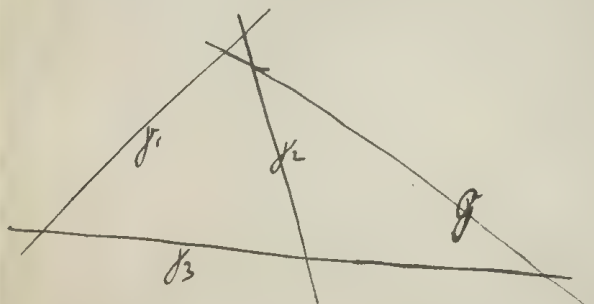
czyli G_1 i G_1' są promieniami opóźnionymi

Punkty przecięcia się promieni odpowiednich parów jednostajnych leżą na krzywej 2go rzędu ^{reguła} (przechodzącej przez wierzchołki):

$$G_1 - \lambda G_2^* = 0 \quad | \quad G_1' - \lambda G_2' = 0$$

$$G_1 G_2' - G_2 G_1' = 0 \quad = \text{warunek drugiego stopnia w } x, y$$

Spółrzędne trójkątne



Trójkąt odniesienia
(Fundamental triangle)

$$f_1 \equiv x \cos \alpha_1 + y \sin \alpha_1 - p_1 = 0$$

$$f_2 \equiv x \cos \alpha_2 + y \sin \alpha_2 - p_2 = 0$$

$$f_3 \equiv x \cos \alpha_3 + y \sin \alpha_3 - p_3 = 0$$

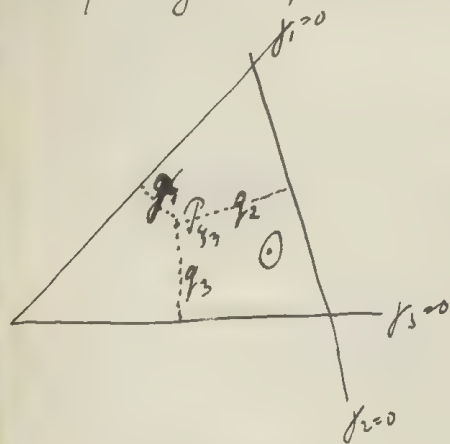
$$G \equiv k_1 f_1 + k_2 f_2 + k_3 f_3 = 0$$

k_1, k_2, k_3 ~~nie są~~ ~~nie są~~ jako anacorezy

położenie prostej, a f_1, f_2, f_3 są wielkościami zmiennymi
Stądże ze x, y etc., możemy je uważać jako współrzędne

Jeżeli wstawimy pewne wartości x, y w tamte równania, to otrzymamy

15
 pewien punkt oznaczony przez f_1, f_2, f_3 , to wielkość przedstawia
 wtedy odległości punktu od trzech boków trójkąta (z ujemnym znakiem)



$$(f_1)_{q_1} = -q_1$$

$$(f_2)_{q_2} = -q_2$$

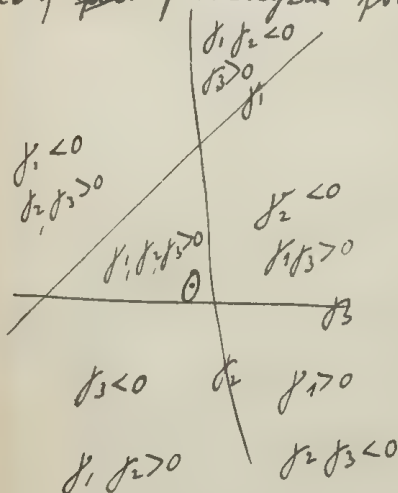
$$(f_3)_{q_3} = -q_3$$

i równanie powyższe stanowi warunek
 teni odległości.

(prostopadłości)

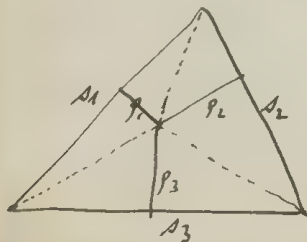
Nazwamy f_1, f_2, f_3 współrzędnymi trójkątnymi punktu.

Część ~~z~~ płaszczyzny podzielona na 7 pól:



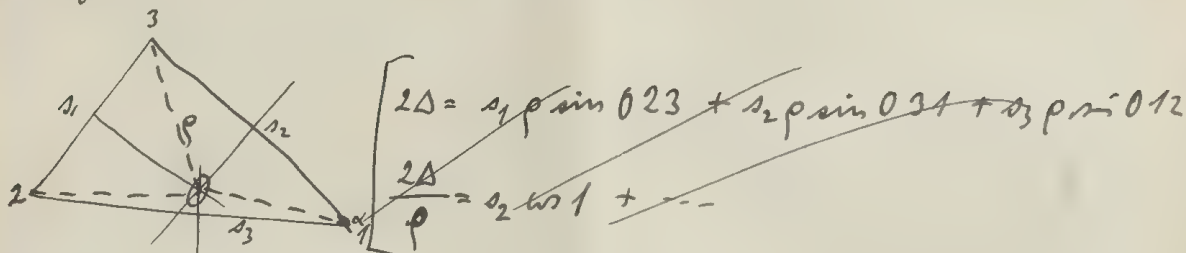
Widzimy, że na tej samej linii
 rozpatrywać także że stano-
 wiska wyraża algebraicznie
 t.j. ujemnymi subskrypcjami
 $x^2 + y^2 = r^2$ etc. etc.
 same jak możliwości
 otrzymać $x^2 + y^2 = u$
 $x^2 - y^2 = v$ etc.

Wydaje się to dziwne, że do
 określenia położenia punktu
 potrzebuje 3 wielkości zamiast
 dwóch jak dawniej, ^{nie są one} ale ~~jest to~~ ten
~~tytuł~~ nie od siebie,
 zawsze między innymi istnieć
 musi następny warunek.



$$q_1 q_1 + q_2 q_2 + q_3 q_3 = 2\Delta = -(q_1 f_1 + q_2 f_2 + q_3 f_3)$$

Na uwagę zasługuje szczególna postać punktu P - środka kół opartych na trójkącie



Wtedy: $\angle 213 = \frac{1}{2} \angle 203 = \angle 20s_1$

$\frac{s_1}{2} = \rho \sin 023$

$\rho \sin 023 =$

$= \rho \sin 20s_1 = \rho \sin \alpha_1$

$\frac{s_1}{\rho} = 2 \sin \alpha_1$

$\frac{\sin \alpha_1}{s_1} = \frac{\sin \alpha_2}{s_2} = \frac{\sin \alpha_3}{s_3} = \frac{1}{2\rho}$

$s_1 = \frac{2 \sin \alpha_1}{\rho}$

$s_2 = \frac{2 \sin \alpha_2}{\rho}$

$s_3 = \frac{2 \sin \alpha_3}{\rho}$

Zatem oś równowagi toku w formie: $f_1 \sin \alpha_1 + f_2 \sin \alpha_2 + f_3 \sin \alpha_3 = -\frac{\Delta}{\rho}$

Jeżeli dane współrzędne punktu $O(x, y)$ i obrotowe względem boków to f_1, f_2, f_3 otrzymamy się wprost przez wstawienie do wz. 1.

Odwrotnie jeżeli dane f_1, f_2, f_3 to znajdziemy x, y równań $x^2 + y^2 = r^2$.

Widać że jak gdybyśmy byli zamocowani prostymi słupkami, ale praca ta jest trudna przedstawiając niektóre korzyści, mianowicie jednorodność do tego projektu w zadaniach gdzie trójkąt jest dany przez warunki zgodne,

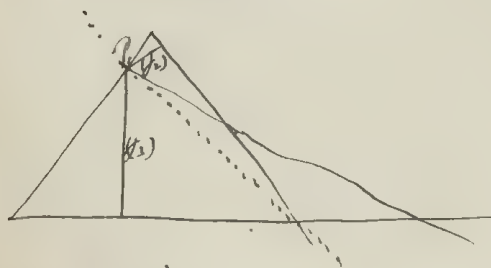
Wróćmy jeszcze do równania prostej w tej formie

$j_1 \kappa_1 + j_2 \kappa_2 + j_3 \kappa_3 = 0$ i jeżeli są n. p. współrzędne punktów przecięcia z -
~~tego zniesienie mają~~ $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$

Punkt przecięcia z j_1 ma $j_1 = 0$ zatem dwie inne współrzędne: $(j_2 \kappa_2 + j_3 \kappa_3) = 0$

zatem $\frac{\kappa_2}{\kappa_3} = -\frac{j_3}{j_2}$

do tego $(j_2 \kappa_2 + j_3 \kappa_3) \kappa_3 = 2\Delta$



$$P_1 \begin{cases} j_3^2 = \frac{2\kappa_2 \Delta}{\kappa_3 \kappa_2 - \kappa_2 \kappa_3} \\ j_2 = \frac{2\kappa_3 \Delta}{\kappa_2 \kappa_3 - \kappa_3 \kappa_2} \end{cases}$$

i podobnie P_2 i P_3

$$\frac{\kappa_2}{\kappa_3} = -\frac{j_3}{j_2}$$

Równanie $j_2 \kappa_2 + j_3 \kappa_3 = 0$ jeżeli teraz j_2, j_3 zmienimy

przebiega prosta $P_1 A$, jak z tego widać i przechodzi przez punkt

przecięcia z j_1, j_3 $j_1 = A$ a także przez P_1 bo można napisać $= \kappa_1 j_1 - (\kappa_2 \kappa_3 + j_2 j_3)$

Oczywiście ten punkt jest punktem zadania oryginalnego równania $\frac{\kappa_2}{\kappa_3} = -\frac{j_3}{j_2}$

Wyznaczyć κ_3 i możemy dwoma prostymi danymi $G \equiv a_1 j_1 + a_2 j_2 + a_3 j_3$

$$G' \equiv b_1 j_1 + b_2 j_2 + b_3 j_3$$

$$G \equiv x \cos \alpha + y \sin \alpha - r$$

$$G' \equiv x \cos \beta + y \sin \beta - r'$$

$$\tan \mu = \tan(\alpha - \beta)$$

$$= \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} = \frac{\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta}$$

$$G \equiv Ax + By + C = 0 \quad \delta = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} x + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} y + \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 0$$

$$G' \equiv A'x + B'y + C' = 0$$

$$\tan \mu = \frac{B A' - B' A}{A A' + B B'}$$

$$\begin{array}{l|l} A = a_1 \omega_1 + a_2 \omega_2 + a_3 \omega_3 & D = a_1 \sin \alpha_1 + b_1 \sin \alpha_2 + \\ A' = b_1 \omega_1 + b_2 \omega_2 + b_3 \omega_3 & D' = b_1 \sin \alpha_1 + b_2 \sin \alpha_2 \end{array}$$

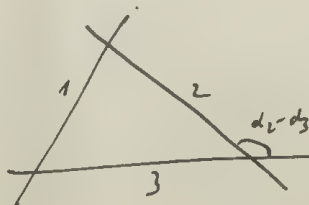
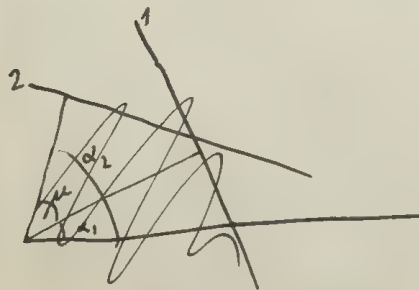
$$\tan \mu = \frac{(a_1 \omega_1 + a_2 \omega_2)(b_1 \sin \alpha_1 + \dots) - (b_1 \omega_1 + \dots)(a_1 \sin \alpha_1 + \dots)}{(a_1 \omega_1 + \dots)(b_1 \sin \alpha_1 + \dots) + (a_1 \sin \alpha_1 + \dots)(b_1 \omega_1 + \dots)}$$

$$= a_1 b_2 (\omega_1 \sin \alpha_2 - \omega_2 \sin \alpha_1) + a_2 b_1 (\omega_2 \sin \alpha_1 - \omega_1 \sin \alpha_2) + \\ + a_3 b_3 (\omega_2 \sin \alpha_3 - \omega_3 \sin \alpha_2) + a_3 b_2 (\omega_3 \sin \alpha_1 - \omega_1 \sin \alpha_3) + \\ + a_3 b_1 (\omega_3 \sin \alpha_2 - \omega_2 \sin \alpha_3)$$

$$= \frac{(a_1 b_2 - a_2 b_1)(\omega_1 \sin \alpha_2 - \omega_2 \sin \alpha_1) + (a_3 b_2 - a_2 b_3)(\omega_3 \sin \alpha_1 - \omega_1 \sin \alpha_3) + (a_3 b_1 - a_1 b_3)(\omega_3 \sin \alpha_2 - \omega_2 \sin \alpha_3)}{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + a_1 b_1 (\omega_2 \sin \alpha_1 + \omega_1 \sin \alpha_2) + a_2 b_2 (\omega_3 \sin \alpha_2 + \omega_2 \sin \alpha_3) + a_3 b_3 (\omega_1 \sin \alpha_3 + \omega_3 \sin \alpha_1)}$$

$$= \frac{(a_1 b_2 - a_2 b_1) \sin(\alpha_1 + \alpha_2) + (a_1 b_3 - a_3 b_1) \sin(\alpha_1 + \alpha_3) + (a_2 b_3 - a_3 b_2) \sin(\alpha_2 + \alpha_3)}{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + (a_1 b_2 + a_2 b_1) \sin(\alpha_1 + \alpha_2) + (a_1 b_3 + a_3 b_1) \sin(\alpha_1 + \alpha_3) + (a_2 b_3 + a_3 b_2) \sin(\alpha_2 + \alpha_3)}$$

$$= \frac{(a_1 b_2 - a_2 b_1) \sin A_3 + \dots}{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + (a_1 b_2 + a_2 b_1) \sin A_3 + \dots}$$



Wzajemnie $G \perp G'$:

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 - (a_1 b_2 + a_2 b_1) \cos A_3 - (a_2 b_3 + a_3 b_2) \cos A_1 - (a_3 b_1 + a_1 b_3) \cos A_2 = 0$$

$$G \parallel G' : \begin{vmatrix} \sin A_1 & \sin A_2 & \sin A_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0$$

Jeżeli 3 punkty leżą na prostej $P \left\{ \begin{matrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{matrix} \right\} \quad P' \left\{ \begin{matrix} p'_1 \\ p'_2 \\ p'_3 \end{matrix} \right\} \quad P'' \left\{ \begin{matrix} p''_1 \\ p''_2 \\ p''_3 \end{matrix} \right\}$

$$\left. \begin{aligned} a_1 p_1 + a_2 p_2 + a_3 p_3 &= 0 \\ a_1 p'_1 + a_2 p'_2 + a_3 p'_3 &= 0 \\ a_1 p''_1 + a_2 p''_2 + a_3 p''_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} p'_3 & \quad a_1(p_1 p'_3 - p'_1 p_3) + a_2(p_2 p'_3 - p'_2 p_3) = 0 \\ -p_3 & \quad (a_1(p_1 p'_1 - p'_1 p_1) + a_2(p_2 p'_1 - p'_2 p_1)) = 0 \\ & \quad (a_3(p_3 p'_1 - p'_3 p_1) + a_1(p_1 p'_2 - p'_1 p_2)) = 0 \end{aligned}$$

$$\frac{a_1}{p_2 p'_3 - p'_2 p_3} = \frac{a_2}{p_3 p'_1 - p'_3 p_1} = \frac{a_3}{p_1 p'_2 - p'_1 p_2} = c$$

$$p_1(p_2 p'_3 - p'_2 p_3) + p_2(p_3 p'_1 - p'_3 p_1) + p_3(p_1 p'_2 - p'_1 p_2) = 0$$

Wzajemnie $G \perp G'$ jeżeli 3 punkty leżą na prostej:

$$\begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ p'_1 & p'_2 & p'_3 \\ p''_1 & p''_2 & p''_3 \end{vmatrix} = 0$$

Jeżeli p_1, p_2, p_3 uważa się jako współrzędne punktu

zmiennego to wyrażenie powyższe jest równaniem prostej przechodzącej przez P'_1, P'_2, P'_3

Współrzędne tych współrzędnych:

Wynikowe równanie przedstawia jednorodną postać niezmienioną jeżeli pomnożymy je przez dowolne stałe, zatem możemy te punkty p'_1, p'_2, p'_3 uważać jako

spółczesne ; aby je odwrócić od tamtych nazwiemy je x_1 x_2 x_3

$$x_1 = \rho f_1 \quad x_2 = \rho f_2 \quad x_3 = \rho f_3$$

jeżeli dane nam jest x_1, x_2, x_3 to przez to : f_1, f_2, f_3 są dane bo mamy

rowanie $f_1 a_1 + f_2 a_2 + f_3 a_3 = 2\Delta$

wg $x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3 = \frac{2\Delta}{\rho}$

Poznanie punktu stożnika nie zależy od ich ^{konkretnych} wartości tylko od stosunku tych trzech wielkości, co i ze znaniem geometrycznego wypadka.



jeżeli nam są dane długości f_1, f_2, f_3 tylko ~~stosunek~~ wielkości proporcjonalne, to zawsze stosunek $\frac{f_1}{f_2} = \frac{x_1}{x_2}$ itd. tak że można wyznaczyć trzy proste $f_1 - \frac{x_1}{x_2} f_2 = 0$ etc. na których

przebiega punkt leży.

Wzorem zamy 3 punkty leżące na prostej jest zawsze ten sam :

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x'_1 & x'_2 & x'_3 \\ x''_1 & x''_2 & x''_3 \end{vmatrix} = 0$$

Jak łatwo widać można rachować pokazując następujący przykład :

znajdźmy współrzędne punktów : środka ~~ciężkości~~ masy trójkąta, ~~środek~~ punktu przecięcia trzech wysokości, środka koła opisanego.

co do pierwszego możemy mieć równanie : $f_1 \sin \alpha_1 - f_2 \sin \alpha_2 = 0$

$f_2 \sin \alpha_2 - f_3 \sin \alpha_3 = 0$ itd.

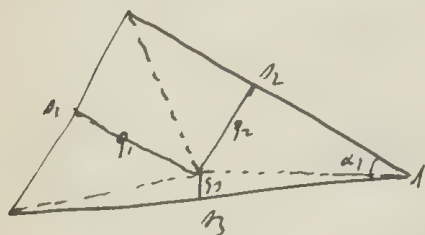
wg : $\frac{f_1}{f_2} = \frac{\sin \alpha_2}{\sin \alpha_1}$ wg - $f_1 : f_2 : f_3 = \frac{1}{\sin \alpha_1} : \frac{1}{\sin \alpha_2} : \frac{1}{\sin \alpha_3}$

$$\text{wzgl. } x_1 = \frac{1}{\sin \alpha_1}, \quad x_2 = \frac{1}{\sin \alpha_2}, \quad x_3 = \frac{1}{\sin \alpha_3} \quad \} M$$

tak samo co do trzech wysokości:

$$x'_1 = \frac{1}{\cos \alpha_1}, \quad x'_2 = \frac{1}{\cos \alpha_2}, \quad x'_3 = \frac{1}{\cos \alpha_3} \quad \} W$$

a co do środka kół opisanych:



$$r_1 = \rho \sin \alpha_1$$

$$\text{zatem } \left. \begin{aligned} x_1'' &= \frac{1}{\sin \alpha_1} \\ x_2'' &= \frac{1}{\sin \alpha_2} \\ x_3'' &= \frac{1}{\sin \alpha_3} \end{aligned} \right\} K$$

$$r_2 = \rho \sin \alpha_2$$

$$r_3 = \rho \sin \alpha_3$$

$$x_3'' = \frac{1}{\sin \alpha_3}$$

Tenże można dowiedzieć się one leżą na jednej prostej:

zatem x_1, x_2, x_3 można tak napisać:

$$x_1 = \sin \alpha_2 \sin \alpha_3 \quad x_2 = \sin \alpha_1 \sin \alpha_3 \quad x_3 = \sin \alpha_1 \sin \alpha_2$$

$$x'_1 = \cos \alpha_2 \cos \alpha_3 \quad x'_2 = \cos \alpha_1 \cos \alpha_3 \quad x'_3 = \cos \alpha_1 \cos \alpha_2$$

$$x''_1 = \frac{1}{\sin \alpha_1} \quad x''_2 = \frac{1}{\sin \alpha_2} \quad x''_3 = \frac{1}{\sin \alpha_3}$$

Wzrostek jest:

$$x_1'' (x_2' x_3 - x_3' x_2) + x_2'' (x_3' x_1 - x_1' x_3) + x_3'' (x_1' x_2 - x_2' x_1) = 0$$

$$\sin \alpha_1 \cos \alpha_2 \cos \alpha_3 \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 - \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 \sin \alpha_1 \sin \alpha_3 = \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 \sin \alpha_1 (\cos \alpha_3 - \sin \alpha_3)$$

$$x_1 (x_2' x_3'' - x_3' x_2'') + x_2 (\dots)$$

$$\sin \alpha_1 \cos \alpha_2 \sin \alpha_3 - \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 \sin \alpha_3$$


$$\begin{aligned} & \sin \alpha_2 \sin \alpha_3 \cos \alpha_1 (\cos \alpha_3^2 - \cos \alpha_1^2) + \\ & \sin \alpha_3 \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 (\cos \alpha_1^2 - \cos \alpha_3^2) + \\ & \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \cos \alpha_3 (\cos \alpha_1^2 - \cos \alpha_2^2) \end{aligned} =$$

$$\cos \alpha_3^2 [\sin \alpha_3 (\sin(\alpha_2 - \alpha_1) + \cos \alpha_1^2 \sin \alpha_1 \sin(\alpha_3 - \alpha_2) + \cos \alpha_2^2 \sin \alpha_2 \sin(\alpha_1 - \alpha_3))$$

Takie i wygledzi nasze sploszczone protoketne moine wzaiaci jako taki
oplosne sploszczone trójketne.

Najp $Ax + By + C = 0$ moine napisać w formie

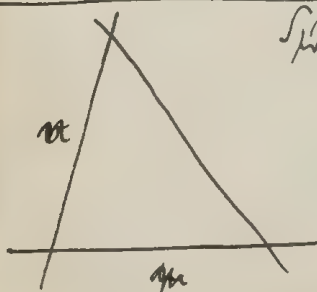
$$\begin{aligned} & \underbrace{A}_A x + \underbrace{B}_B y + \underbrace{[O.x + O.y + C]}_C = 0 \\ & = O_1' X = O_2' Y = \text{prosta w miejscowości} \end{aligned}$$

Zatem tutaj trójket odzwierciedla = 

Moine takie prowadzić one równani w formę jednowartości ~~dwu~~

$$\text{którego } x = \frac{x_1}{x_3} \quad y = \frac{x_2}{x_3}$$

$$Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 = 0$$



Sploszczone linie.

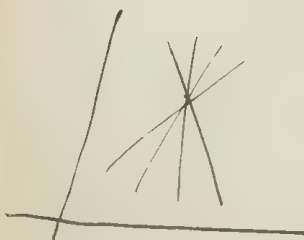
Tak samo jak waiadomym punkt jako element,
dany przez 2 sploszczone tak samo moine i nowe
linie przez jako dane przez sploszczeni jej
2 wielkości które moine napisać

Plukkie sploszczone

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1$$

$$-\frac{1}{m} = u \quad -\frac{1}{n} = v$$

$xu + yv = 1$ to ~~nie~~ wyraża się punkt leży na linii; ~~tylko~~ ^{to} można
 uważać albo współrzędne punktu jako zmienne niezależne
 = równanie prostej albo x, y jako dane i u, v jako
 zmienne = równanie punktu



$u=0, v=v_0$ prosta $\parallel y$ oś.

Wzajemnie odwzajemniwszy mieli związek między x i y

$f(x, y) = 0$ to ^{prezentacja to} ~~miejscu~~ geometryczne wszystkich punktów które równo-
 żeństwo spełnia to równanie = linia krzywa

$F(u, v) = 0$ = miejsce geometryczne wszystkich prostych równoległych
 spełniających to równanie = krzywa ^{jakieś} ~~styczna~~ z ową prostą



Ogólne równanie punktu: $Au + Bv + C = 0$

$$\frac{A}{C} = x \quad \frac{B}{C} = y$$

Krzywe polya na osiadych
 dwustronnie (Duchotat!)

27.

$$g_1 = A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$$

$$g_2 = A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$$

$$x = \frac{B_1 C_2 - B_2 C_1}{A_1 B_2 - A_2 B_1}$$

$$y =$$

$$P_1 = A_1 x + B_1 y + C_1$$

$$= a_1 u + b_1 v + c_1$$

$$P_2 = a_2 u + b_2 v + c_2$$

Wyznaczamy stałą k :

$$u = \frac{b_1 c_2 - b_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$$

$$v =$$

Równanie prostej przechodzącej przez 2 punkty

$$\begin{aligned} P_1 \{ x_1, y_1 \} \quad P_2 \{ x_2, y_2 \} \\ A_1 x + B_1 y + C_1 = 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 = 0 \end{aligned}$$

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0$$

$$A(x - x_2) + B(y - y_2) = 0$$

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$$

Równanie prostej łączącej na dwóch prostych
= prostej przegięcia

$$g_1 \{ u_1, v_1 \} \quad g_2 \{ u_2, v_2 \}$$

$$a u_1 + b v_1 + c = 0$$

$$a u + b v + c = 0$$

$$a u_2 + b v_2 + c = 0$$

$$u - v_1 = \frac{v_2 - v_1}{u_2 - u_1} (u - u_1)$$

Styczna prostej odległej z punktem

na prostej jęzi

Dane równanie prostej i współrzędne punktu

$$u x + v y + 1 = 0$$

$$- \frac{u x + v y + 1}{\sqrt{u^2 + v^2}} = 0$$

$$A x + B y + 1 = 0$$

Formuła

$$p = \frac{|A x_0 + B y_0 + 1|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Dane współrzędne prostej: równanie punktu

$$P_2 = a_2 u + b_2 v + 1 = 0$$

$$p = \frac{|a_2 u_0 + b_2 v_0 + 1|}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$$

3 proste przecinają się w jednym punkcie

3 punkty leżą na jednej prostej

12

$$G_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0$$

$$G_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

$$G_3: A_3x + B_3y + C_3 = 0$$

$$(A_1C_2 - A_2C_1)x + (B_1C_2 - B_2C_1)y = 0$$

$$k_1G_1 + k_2G_2 + k_3G_3 = 0$$

$$k_1A_1 + k_2A_2 + k_3A_3 = 0$$

$$k_1B_1$$

$$= 0$$

$$k_1C_1$$

$$= 0$$

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} = 0$$

zatem to jest równanie punktu przecięcia
jżeli dane są trzy proste

zatem to jest

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0$$

Wzór równania prostej przez punkt przecięcia (S_1, S_2)

$$G_3 = -\frac{k_1}{k_2}G_1 + \frac{k_1}{k_2}G_2$$

zatem

$$P_1 = a_1u + b_1v + c_1 = 0$$

$$P_2 =$$

$$P_3 =$$

$$k_1P_1 + k_2P_2 + k_3P_3 = 0$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

równanie prostej przechodzącej przez

3 punkty o danych współrzędnych

$$\begin{vmatrix} \frac{a_1}{c_1} & \frac{a_2}{c_2} & x \\ \frac{b_1}{c_1} & \frac{b_2}{c_2} & y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

równanie punktu na prostej przez (P_1, P_2)

$$P_3 = P_1 - \lambda P_2$$

$\lambda =$ stromek podzielnik wstaw kątów

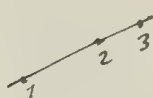
$\lambda =$ stromek podzielnik długości

$$P_3 = a_3 u + b_3 v + c_3 = 0$$

$$\frac{a_3}{c_3} = x_3 = \frac{a_1 + \lambda a_2}{1 + \lambda} = \frac{a_1 + \lambda a_2}{1 + \lambda}$$

$$x_3 + \lambda x_2 = x_1 + \lambda x_2$$

$$x_3 - x_1 = \lambda(x_2 - x_2)$$



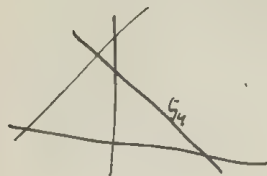
$$\lambda = \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1}$$

Jżeli dane 3 punkty nie leżą na jednej prostej to powstała prosta

dane 3 punkty nie na jednej prostej
4 punkt

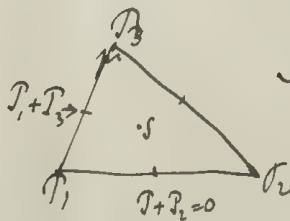
$$S_4 = \kappa_1 S_1 + \kappa_2 S_2 + \kappa_3 S_3$$

$$P_4 = \kappa_1 P_1 + \kappa_2 P_2 + \kappa_3 P_3$$



P_4

m.p. środków mas:



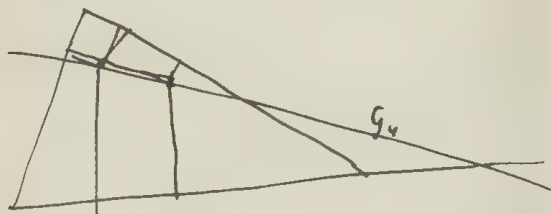
$$S \equiv P_1 + P_2 + P_3 = 0$$

to jest równanie punktu
ciężkości na linii $P_1 + P_2$ i $P_2 + P_3$

$P_1 + P_3$ P_2

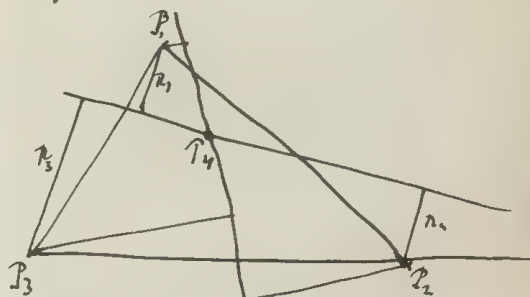
$P_2 + P_3$ P_1

Jżeli dane 3 proste f_1, f_2, f_3 ,
to rozwiązanie ciętej prostej $G_4 = k_1 f_1 + k_2 f_2 + k_3 f_3$
wynosi że dla jęci punktów 2 i 3 kęci bęci
punktu prostej 4 w tym stętku



$(f_1)(f_2)(f_3) =$ spętkęci tręj kęci punktu

Jżeli dane 3 punkty P_1, P_2, P_3
to rozwiązanie ciętego punktu $P_4 =$
wynosi że dla jęci punktów 2 i 3 kęci bęci
na jęci bęci prostej przechodęci przez 4 w
w tym stętku



$(P_1)(P_2)(P_3)$ spętkęci tręj kęci
prostej



rozważamy już pojęcia krzywych rzędu n -tego i klasy n -tej

$$f(x, y) = 0$$

$$F(u, v) = 0$$

albo ogólniej współrzędnych jednorodnych $f(x_1, x_2, x_3) = 0$

Najracjonalniej byłoby teraz badać w jakim stopniu te stopy do siebie i tak pokazałoby się mianowicie że krzywe rzędu 2go i klasy 2ej są identyczne.

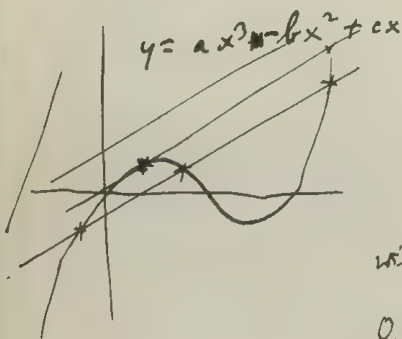
To są jednak trudniejsze badania które sobie zostawimy na później, teraz będziemy się zajmować krzywymi rzędu 2go, wy utworzonymi przez równanie drugiego stopnia między współrzędnymi punktu krzywej. ~~Ponieważ~~

W ogólności $Ax^2 + Bx^{n-1} + \dots + K = 0$ ma rozwiązywać w punktach przecięcia z daną prostą $y = ax + b$

$$Ax^2 + Bax^2 + \dots + (A' + bB)x^{n-1} + B'a^2x^{n-1} + \dots + K = 0$$

$$Mx^2 + Nx^{n-1} + Px^{n-2} + \dots + K = 0 \quad \text{względnie w pierwiastkach dla } x$$

które albo mogą być rzeczywiste albo urojone



względnie krzywe stopnia drugiego mogą być przecięte w 0, 1, 2 punktach rzeczywistych

jeżeli uważamy takie równanie urojone jako wchodzące w rachuby to mówimy że każda prosta przecina krzywą II w 2 punktach które są albo rzeczywiste, albo urojone albo trzeci punkt podwójny (styczny).

Ofstus forma

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

Oznaczenie pochodzących z ogólnego równania

$$x = \frac{x_1}{x_2}, \quad y = \frac{x_3}{x_2}$$

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{31}x_3x_1 = 0$$

Macierz 6 statycznych; przez jedną moimę pochodzących z ogólnego równania mamy 5 warunków, zatem w ogólnym przypadku musi być danych 5 relacji między x a y t.j. 5 punktów do oznaczenia krzywej II.

N.p. 5 ~~punktów~~ obserwacji do oznaczenia krzywej drugiego rzędu (w rzeczywistości nie potrzebujemy tyle bo wystarczy 3 ^{stanie jest ogólnie} ~~o pochodzących z ogólnego~~ ~~stanie~~ st.)

stwierdzając teraz $y = ax + b$ stwierdzamy równanie

~~$$ax^2 + bx + c = 0$$~~

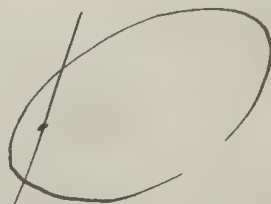
$$x^2 + Mx + N = 0$$

czyli
$$x = -\frac{M}{2} \pm \sqrt{\frac{M^2}{4} - N}$$

$$y = b + a \left(\right)$$

punkt oznaczony przez
$$\begin{cases} x = -\frac{M}{2} \\ y = b - \frac{aM}{2} \end{cases}$$

jest równie oddalony od dwóch punktów przecięcia osi x i y z osiami



Najczęściej spotykanych krzywych matematycznych $z = \cos \varphi$ $y = \sin \varphi$

$$(a_{11}\cos^2\varphi + 2a_{12}\cos\varphi\sin\varphi + a_{22}\sin^2\varphi)x^2 + 2(a_{13}\cos\varphi + a_{23}\sin\varphi)x + a_{33} = 0$$

gdzie natychmiast 2 wartości z dla pewnego φ

dróg - przez z^2

$$\left(\quad \right) + \frac{2(a_{13} \cos \varphi + a_{23} \sin \varphi)}{z} + \frac{a_{33}}{z^2} = 0$$

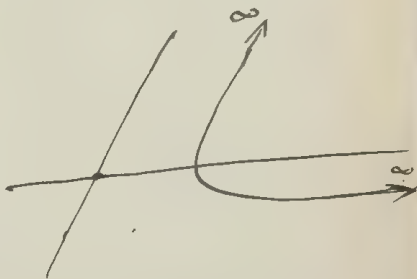
Jeżeli $z = \infty$ jest możliwy punkt, to pierwsze wyrażenie musi być $= 0$
 więc to będzie miała miejsce w kierunkach asymptotycznych przez

$$a_{11} + 2a_{12} \tan \varphi + a_{22} \tan^2 \varphi = 0$$

Wtedy dwa kierunki, które proste = asymptoty

rozwinięcie ich $y = x \tan \varphi$:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = 0 \quad \text{para prostych}$$



Wtedy tego drugie to proste są rzeczywiste są urojone są też jest to prosta podwójna
 zależy się to będzie na doposy hiperbola parabola

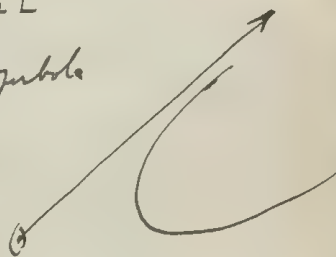
$$\tan^2 \varphi + \frac{2a_{12}}{a_{22}} \tan \varphi = - \frac{a_{11}}{a_{22}}$$

$$\tan \varphi = - \frac{a_{12}}{a_{22}} \pm \sqrt{\left(\frac{a_{12}}{a_{22}}\right)^2 - \frac{a_{11}}{a_{22}}} = \frac{1}{a_{22}} \left[-a_{12} \pm \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}} \right]$$

zatem jeżeli $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} (= \text{wyrażnik}) > 0$ hiperbola

$a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$ parabola

$a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$ elipsa



Tam gdzie przypadkiem jeżeli φ tak obrócić że $a_{13} + a_{23} \tan \varphi = 0$
 wtedy w tym kierunku dwa równe dla przesłone wartości z więc punkt
 0 będzie środkiem ciężkości w tym kierunku. Dla każdego z przypadków

a_{12} i $a_{23} = 0$ były wtedy wszystkie cztery są położone przez punkt 0 w
 równie części = środek krzywej.

Łatwo pokazać że, jeżeli punkt 0 dobiecemy dowolnie blisko siebie w tej
 parze, możemy postawić:

$$\begin{aligned} x &= a + x' & y &= b + y' \\ a_{11} x'^2 + 2 a_{12} x' y' + a_{22} y'^2 + 2 [a_{11} a + a_{12} (a+b) + a_{22} b] + 2(a_{13} a + a_{23} b) x \\ &+ 2(a_{12} a + a_{23} b) y + a_{33} + a_{11}^2 + b_{11}^2 + 2a_{12} b + \dots = 0 \end{aligned}$$

a i b zawsze możemy tak wybrać że:

$$a_{11} a + a_{12} b + a_{13} = 0$$

$$a_{12} a + a_{22} b + a_{23} = 0$$

tylko jeden punkt dobiecemy wszystkich
 części = środek.

$$a = \frac{a_{22} a_{13} - a_{12} a_{23}}{a_{12}^2 - a_{11} a_{22}}$$

$$b = \frac{a_{11} a_{23} - a_{12} a_{13}}{a_{12}^2 - a_{11} a_{22}}$$

dla danych: parabole to są zawsze wielkośći skończone, dla paraboli
 jednak $a = b = \infty$, to otrzymamy wszystkie są dla tego także krzywe
 bez środka. Wtedy więc równanie będzie miało kształt

$$a_{11} x'^2 + 2 a_{12} x' y' + a_{22} y'^2 + a_{33} = 0 \text{ symet.}$$

Dojdziemy na to że w kierunku y punkt 0 jest środkiem ciężkości

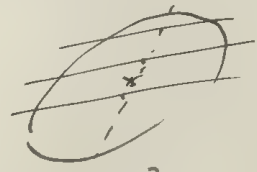
tęż otrzymamy $x = x_0 + x'$
 $y = y_0 + y'$

zobaczemy gdzie musi być x_0 i y_0
 aby środek punkt 0 był środkiem ciężkości
 równoległy jest pod tym samym kątem

Wtedy musi być: $(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13})x + (a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23})x + \dots = 0$
 z x i y i wszystkie inne wielkości z wyjątkiem x_0 i y_0 są stałe z
 wszystkich punktów rodziny wyznaczonej równaniem będącym środkiem ciężkości
 równoległych do φ $(a_{11}x + a_{12}y + a_{13})x_0 + (a_{12}x + a_{22}y + a_{23})y_0 + \dots = 0$
 z formy tego równania wynika że przechodzi ono przez punkt
 przecięcia prostych $a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0$ $a_{12}x + a_{22}y + a_{23} = 0$

t.j. stała nieśrodek

ciężkości przechodzą przez środek niesymetrycznej średnicy zot: środki
 ciężkości równoległych leżą na średnicy.

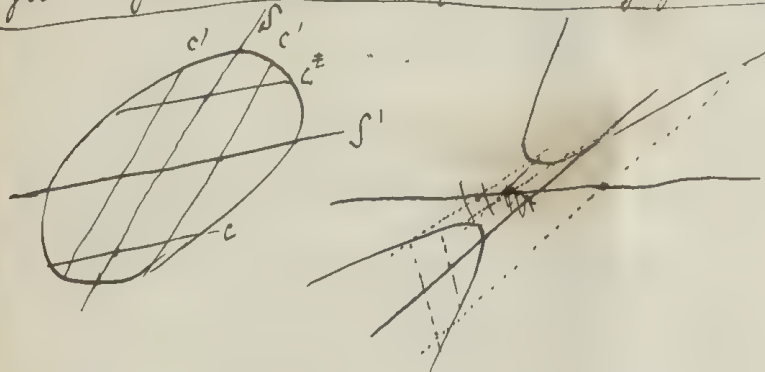


Zatem wszystkie średnice paraboli są równoległe bo idą przez środek
 masowego oddziaływania.

Jżeli dany bryłowy przyciąg II to można wystrzelić w kierunku
 hiperboli albo paraboli względem dwóch środków



Srednicami sprężonemu narysowany ^{dwie} Atkie 2 kątach każde jest miejscem geometrycznym środków cięciw równoległych z drugą



Liczby C

$S =$ prosta przechodząca przez środki

Linię C' równoległą z S

S' jest sumą równoległą z C

Dowód:

Równanie prostej przechodzącej przez środki (cięciw pod kątem φ):

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13} + (a_{12}x + a_{22}y + a_{23}) \operatorname{tg} \varphi = 0$$

Jaki jej kierunek?

$$(a_{11} + a_{12} \operatorname{tg} \varphi)x + (a_{12} + a_{22} \operatorname{tg} \varphi)y + a_{13} + a_{23} \operatorname{tg} \varphi = 0$$

$$Ax + Ay + C = 0$$

$$\operatorname{tg} \varphi' = -\frac{A}{B}$$

$$= -\frac{a_{11} + a_{12} \operatorname{tg} \varphi}{a_{12} + a_{22} \operatorname{tg} \varphi}$$

Równanie prostej S' przez środki cięciw równoległych z tg indering: C'

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13} + (a_{12}x + a_{22}y + a_{23}) \operatorname{tg} \varphi' = 0$$

$$(a_{11}x + a_{12}y + a_{13})(a_{12} + a_{22} \operatorname{tg} \varphi) - (a_{12}x + a_{22}y + a_{23})(a_{11} + a_{12} \operatorname{tg} \varphi)$$

Łatwiej z miarą X:

$$\begin{aligned} & [a_{11}(a_{12} + a_{22} \operatorname{tg} \varphi) - a_{12}(a_{11} + a_{12} \operatorname{tg} \varphi)]x \\ & + [a_{12}(a_{12} + a_{22} \operatorname{tg} \varphi) - a_{22}(a_{11} + a_{12} \operatorname{tg} \varphi)]y \\ & \operatorname{tg} \varphi' = -\frac{a_{11} + a_{12} \operatorname{tg} \varphi}{a_{12} + a_{22} \operatorname{tg} \varphi} \end{aligned}$$

$$tg \varphi'' = - \frac{a_{11}(a_{12} + a_{22} tg \varphi) + a_{12}(a_{11} + a_{21} tg \varphi)}{a_{12}(a_{12} + a_{22} tg \varphi) - a_{22}(a_{11} + a_{21} tg \varphi)} = - \frac{a_{11} a_{22} x^2 - a_{12}^2}{a_{12}^2 - a_{11} a_{22}} tg \varphi = tg \varphi$$

więc ma położenie osi C ; to jest bezwzględnie wynika z symetrii równania

$$a_{22} tg \varphi tg \varphi' + a_{12}(tg \varphi + tg \varphi') + a_{11} = 0$$

Takiś średnica SS' osiągnęła maksimum

Jakie muszą zachodzić warunki aby dwie takie średnice mogły być prostopadłe do siebie?

$$tg \varphi = - \frac{1}{tg \varphi'} \quad : \quad a_{22} tg^2 \varphi + (a_{11} - a_{22}) tg \varphi - a_{12} = 0$$

$$tg^2 \varphi + \frac{a_{11} - a_{22}}{a_{12}} tg \varphi = 1$$

$$tg \varphi = \frac{a_{22} - a_{11}}{2 a_{12}} \pm \sqrt{\dots}$$

Gdyby jednak $a_{11} = a_{22}$
było $a_{12} = 0$

to $tg \varphi$ jest nieoznaczony, wówczas

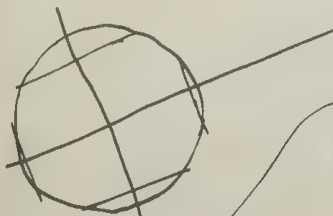
składa się z symetrycznych

jest prostopadła do siebie

wtedy wtedy każde parę się dwie osiągnięły

$$a_{11}(x^2 + y^2) + a_{12}x + a_{22}y + a_{33} = 0$$

to jest wtedy krąg

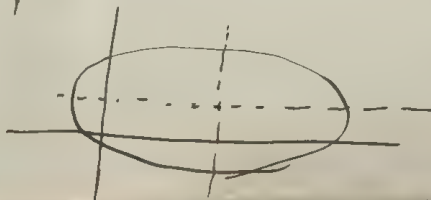


* jeżeli jednak $a_{12} = 0$ $a_{11} > a_{22}$ to mamy

$$tg \varphi = 0 \quad tg \varphi' = -\frac{1}{0} = -\infty$$

A wtedy średnice osiągnięte są

kierunkami X i Y



W każdym układzie współrzędnych (ogólnie Lata) istnieją dwa takie kierunki
 że średnice noszą ten sam orientację kierunek:

Letno dowiedzieć, że te osie są dwusiecznymi asymptot (co do kierunku)

Asymptot poprawnie:

Dla asymptot właściwych:

$$A_1: a_{12}y + a_{11}x \pm x \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}} = 0$$

$$\tan \varphi = \frac{1}{a_{22}} [-a_{12} \pm \sqrt{\dots}]$$

$$A_2: a_{12}y + a_{11}x \mp x \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}} = 0$$

wtedy:
 $\tan \varphi_1 = -\frac{a_{12}}{a_{22}} + \dots$

~~Właściwe kierunki normalne:~~
 $a_{22}y$

$$\tan \varphi_2 = -\frac{a_{12}}{a_{22}} - \dots$$

$$\tan \varphi = \tan \left(\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \right) \quad \text{nie, nie, nie, nie}$$

$$\begin{aligned} \tan(2\varphi) &= \tan(\varphi_1 + \varphi_2) = \frac{2 \tan \varphi}{1 - \tan^2 \varphi} = \frac{\tan \varphi_1 + \tan \varphi_2}{1 - \tan \varphi_1 \tan \varphi_2} = -\frac{2a_{12}}{a_{22}} \\ &= -\frac{2a_{12}}{a_{22} - a_{11}} = \frac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}} \end{aligned}$$

wtedy równanie dla $\tan \varphi$: $\tan^2 \varphi + \frac{a_{11} - a_{22}}{a_{12}} \tan \varphi = 1$

~~$\frac{a_{12}}{a_{11} - a_{22}} \tan \varphi = 1 - \tan^2 \varphi$~~ • to jest właściwe our równanie
 z którego wyznaczamy kierunek φ
 Zatem

A tego samego rezultatu można dojść bez rachunków różniczkowych:

Jeżeli $a_{33} = 0$ to $x=0$ $y=0$ jest punktem leżącym na krzywej, więc

$$(a_{11}x^2y + 2a_{12}xy^2 + a_{22}y^3)x + 2(a_{13}xy^2 + a_{23}y^3) = 0$$

jeżeli teraz pominiemy poprzedni wyraz będzie $a_{13}xy^2 + a_{23}y^3 = 0$

więc dla $y = -\frac{a_{13}}{a_{23}}$ to taki drugi punkt przecięcia $= 0$

to punkta będącymi w tej samej linii; jej równanie: $a_{13}x + a_{23}y = 0$

A jeżeli dane ogólne równanie:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_{33} = 0 \quad \left| \begin{array}{l} \text{i dochodzi nam o stygnięciu} \\ \text{o punkcie } x_0, y_0 \end{array} \right.$$

to potrzebujemy tylko pomnożyć powyższe równanie

$$\xi = x - x_0 \quad \eta = y - y_0 \quad \left| \begin{array}{l} \text{to dla } a_{33} = 0 \text{ jest to punkt } O \text{ będący leżący} \\ \text{na krzywej.} \end{array} \right.$$
$$x = \xi + x_0$$

A będącym wtedy

$$a_{11}\xi^2 + \dots + a_{23}\eta = 0$$

Równanie stygnięcia w powyższym równaniu będzie $a_{13}'\xi + a_{23}'\eta = 0$

$$\text{a to stygnięcie: } a_{13}'(x-x_0) + a_{23}'(y-y_0) = 0$$

$$a_{13}' = a_{11}x_0^2 + a_{12}y_0 + a_{13} \quad a_{23}' = a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}$$

Wynik jest to samo równanie co powyższe.

Styczne w danych punktach drogi x, y . Wzr. przekształca się x punkty x, y

$$a_{11}x'x_1 + a_{12}(x'y_1 + y'x_1) + a_{22}y'y_1 + a_{13}(x' + x_1) + a_{23}(y' + y_1) + a_{33} = 0$$

$$a_{11}x'x_2 + a_{12}(x'y_2 + y'x_2) + \dots = 0$$

Jżeli teraz weźmiemy $x' y'$ jako stałe to równanie

$$a_{11}x'x + a_{12}(x'y + y'x) + a_{22}y'y + \dots = 0$$

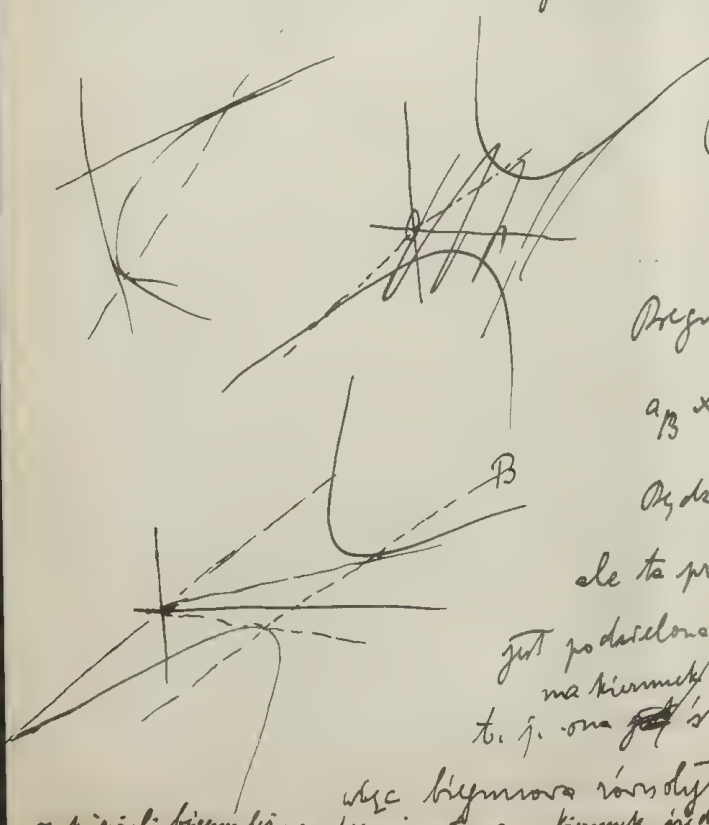
przedstawię prostą przechodzącą przez punkty x_1, y_1 i x_2, y_2 = brynowa

a punkt $x' y'$ = brynowa

Iskierka tak: to równanie przedstawia brynowa jak długi brynowa linij po

ze drogi, gdy porzyciem w danie to staniemy się stycznym

brynowa styczna = punkt styczności



Brynowa środkowa = przekształcenie
do równania tej $(a_{13} \neq 0, a_{23} \neq 0, x \neq 0, y \neq 0)$
 $a_{33} = 0$

Brynowa wyrażona z punktu 0:

$$a_{13}x' + a_{23}y' + a_{33} = 0$$

Wydróżni równość 2 proste $a_{13}x + a_{23}y = 0$

ale ta prosta ma być kierunek w którym

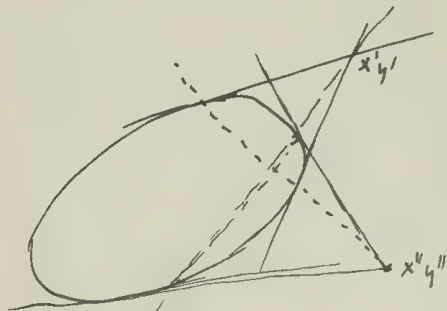
jest podział na dwie części przez ~~proste~~ punkt 0

na kierunku ^{specjalny z średnic} t. j. ona jest ^{specjalny z średnic} średnicą przechodzącą przez ów punkt

Wzr. brynowa równość do średnic ^{specjalny z średnic} przechodzących przez brynowa
m. p. jeżeli brynowa linij na kropki: styczna = kierunek średnic specjalny

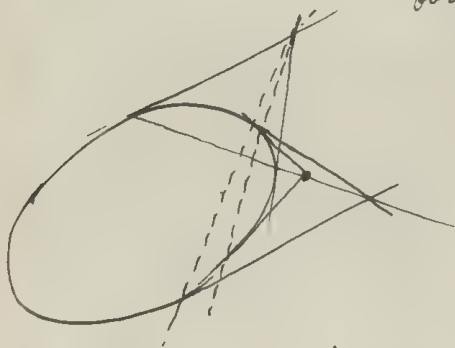
$$a_{11}x'x'' + a_{12}(x'y'' + y'x'') + a_{22}y'y'' + a_{33}(x'+x'')^2 + \dots = 0$$

Jest warunkiem aby punkt $x''y''$ leżał na biegunowej punktu $x'y'$
to jest jednocześnie warunkiem aby punkt $x'y'$ leżał na biegunowej
punktu $x''y''$



Diagonale mierzczą do punktu
przechodzą przez punkty przecięcia
punktów sprzężonych

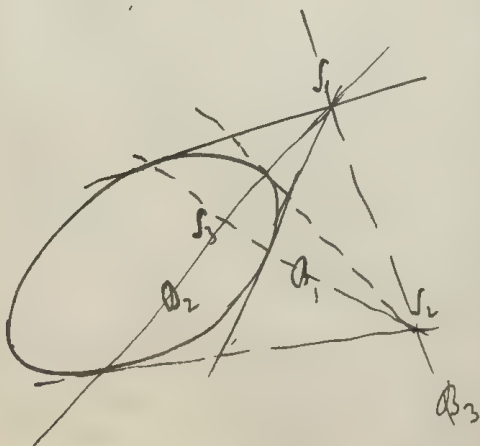
Jżeli Punkt $x'y'$ porusza się po prostej to biegunowa jego będzie się
obracać wokół bieżącej tej prostej



Diagonale punktu przechodzą przez punkty
przecięcia przez bieguny tych prostych.

Diagonale punktu S_3 przechodzą przez
bieguny S_1, S_2

7



Punkt S_3 jako proutek tří rovnic
 s dvěma parametry pro kružnici máme φ, ψ

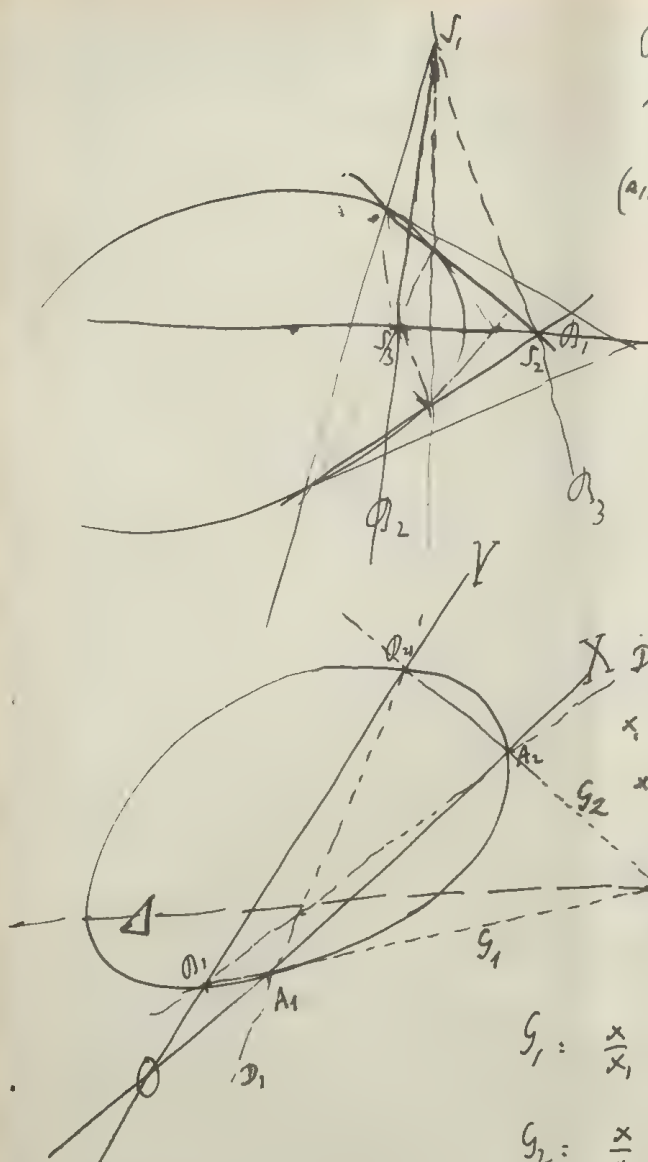
$$(a_{11} \cos \varphi + 2a_{12} \cos \varphi \cos \psi + a_{22} \sin^2 \psi) r^2 + (\dots) r + a_{33} = 0$$

$$Ar^2 + 2Dr + C = 0$$

$$r^2 + \frac{2D}{A}r = -\frac{C}{A}$$

$$r = -\frac{D}{A} \pm \sqrt{\frac{D^2}{A^2} - \frac{C}{A}}$$

$$= \frac{-D \pm \sqrt{D^2 - AC}}{A}$$



$$D_2: a_{11}x^2 + 2a_{13}x + a_{33} = 0$$

$$x_1 = OA_1 = -\frac{a_{13} \pm \sqrt{a_{13}^2 - a_{11}a_{33}}}{a_{11}}$$

$$x_2 = OA_2$$

$$D_1: \begin{cases} x_1 = -\frac{a_{23} \pm \sqrt{a_{23}^2 - a_{22}a_{33}}}{a_{22}} \\ x_2 = \dots \end{cases}$$

$$G_1: \frac{x}{x_1} + \frac{y}{y_1} = 1 \quad D_1: \frac{x}{x_1} + \frac{y}{y_2} = 1$$

$$G_2: \frac{x}{x_2} + \frac{y}{y_2} = 1 \quad D_2: \frac{x}{x_2} + \frac{y}{y_1} = 1$$

$$\frac{x}{x_1} + \frac{x}{x_2} + \frac{y}{y_1} + \frac{y}{y_2} = 2$$

$$\equiv G_1 + G_2$$

$$\equiv D_1 + D_2$$

$$x\left(\frac{1}{2x_1} + \frac{1}{2x_2}\right) + y\left(\frac{1}{2y_1} + \frac{1}{2y_2}\right) = 1$$

rotaci je to proutka pisechodice proutku sch proutky
 proutky t.j. proutka Δ

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{a_{11}}{-a_{13} + \sqrt{a_{13}^2 - a_{11}a_{33}}} + \frac{a_{11}}{-a_{13} - \sqrt{a_{13}^2 - a_{11}a_{33}}} = \frac{a_{11}(-a_{13} - \sqrt{a_{13}^2 - a_{11}a_{33}}) - 2a_{13}}{a_{13}^2 - a_{11}a_{33}} = \frac{-2a_{13}}{a_{33}}$$

rotaci $\Delta = a_{13}x + a_{23}y + a_{33} = 0$ t.j. kugelnovopunkt

zatem z własności ewolucji wypływa że mamy 4 promnie harmoniczne
 utworzone przez 2 boki oscylanty, przez styczne punktu przecięcia tych i
 punktu przecięcia drugich 2 boków i przez tangens tego ostatniego punktu
 albo też: dany punkt stety, szukamy punkt harmonicznie sprzężony
 do niego względem dwóch punktów przecięcia krzywej z jakimś prostym
 jeśli możliwe pomierzanie = biogonowe.

Przekształcenie:

wstawiamy $x = x' + x_0$ potem x_0 i y_0 tak że $a'_{13} = 0$ $a'_{23} = 0$

$$a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}y'^2 + a_{33} = 0$$

$$a'_{33} = a_{11}x_0^2 + 2a_{12}x_0y_0 + a_{22}y_0^2 + \dots = a_{11}a_{22}a_{33} + 2a_{23}a_{13}a_{12} - a_{11}a_{23}^2 -$$

$$-a_{22}a_{13}^2 - a_{33}a_{12}^2$$

$$\frac{\quad}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = \text{wyrażnik}$$

Jeśli teraz obieramy nie jako nie wytyczony to będący ~~między~~

zstępnym walności $x_0 = 0$ ||: $a_{12} = 0$

to jeśli jakiś błąd x wstawimy musimy otrzymać równie i prostsze
 wartości dla y ponieważ składowe równoległych z osią x

zatem z pomocą obrotu oni otrzymamy $a''_{11}x^2 + a''_{22}y^2 + a''_{33} = 0$

Przez dowiedzenie że wyznik $a_{11}a_{22} - a_{12}^2$ pozostaje niezmienny przy 24 jakimś kącie przekształcenia liniowego, mamy że takie przy takim obrocie

$$x = x' \cos \vartheta - y' \sin \vartheta$$

$$y = x' \sin \vartheta + y' \cos \vartheta$$

Tedy takie $a_{11} + a_{22}$ pozostanie niezmiennym bo

$$x'^2 (a_{11} \cos^2 \vartheta + 2a_{12} \cos \vartheta \sin \vartheta + a_{22} \sin^2 \vartheta) + 2x'y' \dots + y'^2 (a_{11} \sin^2 \vartheta + 2a_{12} \sin \vartheta \cos \vartheta + a_{22} \cos^2 \vartheta)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{a_{11}''} \qquad \qquad \qquad \underbrace{\hspace{10em}}_{a_{22}''}$

$$a_{11}'' + a_{22}'' = a_{11} + a_{22}$$

$$a_{11}'' - a_{22}'' = a_{11} - a_{22}$$

$$a_{11}'' a_{22}'' = a_{11} a_{22} - a_{12}^2$$

$$2^2 - (a_{11} + a_{22})2 + a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0 \quad \left\{ \text{zbadaj } a_{11}'' \text{ albo } a_{22}'' \right.$$

$$2 = \frac{a_{11} + a_{22}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a_{11} - a_{22}}{2} \right)^2 + a_{12}^2}$$

$$\left. \begin{matrix} a_{11}'' \\ a_{22}'' \end{matrix} \right\} = \frac{a_{11} + a_{22}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{a_{11}^2 + 2a_{12}^2 + a_{22}^2}$$

Wzrost otrzymamy równanie w formie:

$$a_{11}'' x^2 + a_{22}'' y^2 + a_{33}'' = 0$$

zł. jeżeli $-a_{11}'' a_{22}'' < 0$ wtedy $a_{11}'' a_{22}'' > 0$

Wyp. jeżeli $a_{11}'' a_{22}'' < 0$

0 parabola pozmiej

Odcinki na osiach

$$\sqrt{\frac{-a_{33}''}{a_{11}''}} \quad \sqrt{\frac{-a_{33}''}{a_{22}''}}$$

dwadzieścia przez a_{33}''

$$\text{z wstawiając} \quad -\frac{a_{33}''}{a_{11}''} = a^2 \quad -\frac{a_{33}''}{a_{22}''} = b^2$$

Wzr. Ell $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Wzr. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$) jeśli przyjmujemy $a < 0$

w postaci dwójki biegunowej:

$$\frac{1}{r^2} = \frac{\cos^2 \varphi}{a^2} \pm \frac{\sin^2 \varphi}{b^2}$$

$$a^2 \pm b^2 = e^2$$

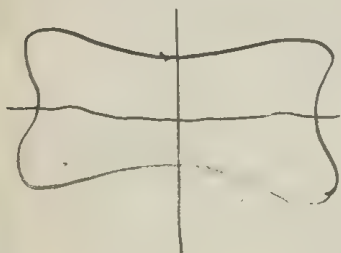
$$\frac{a^2 \pm b^2}{a^2} = e^2$$

$$r^2 = \frac{b^2}{1 - e^2 \cos^2 \varphi} \quad \text{Ell.}$$

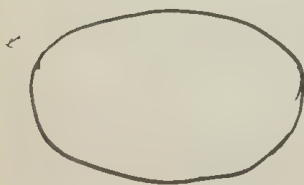
$$r^2 = \frac{-b^2}{1 - e^2 \cos^2 \varphi} \quad \text{Wzr.}$$

Elipsa

Z ~~formy~~ formy już widać że w 4 kwadrantach symetrycznym
względem osi



z dolnej jednostki że x więcej zmniejsza się
od $\varphi = 0$ aż do $\varphi = \frac{\pi}{2}$ gdzie więcej wkłada do incho



Takie 2 typy to

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$

Wzr. jeśli wykreślićmy kręgi a i zmniejszamy
wzrosty y od x i tego samego stosunku $\frac{b}{a}$



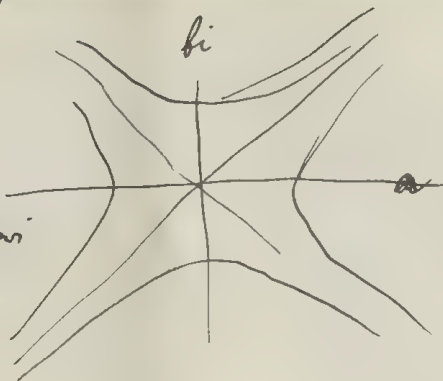
hiperbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

$$x^2 = \frac{b^2}{\varepsilon^2 \cos^2 \varphi - 1}$$

Wszystkie punkty leżą w środku

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$$

hiperbola sprężona



krzywe asymptot: $x = \pm a$: $\varepsilon^2 \cos^2 \varphi = 1$

$$\tan \varphi = \frac{1 - \cos^2 \varphi}{\cos^2 \varphi} = \frac{\varepsilon^2 - 1}{1/\cos^2 \varphi} = \frac{a^2 + b^2 - 1}{1/\cos^2 \varphi} = \frac{b^2}{a^2}$$

$$\tan \varphi = \pm \frac{b}{a}$$

Naturalnie tak samo także hiperbolicznie, jak dowiemy:

$$x^2 \left(\frac{\cos^2 \varphi}{a^2} - \frac{\sin^2 \varphi}{b^2} \right) = 1 \quad \tan \varphi = \pm \frac{b}{a}$$

$$\text{Równanie asymptot: } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \quad \begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0 \\ \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0 \end{cases}$$

Niezależnie od tego, czy mamy do czynienia z hiperbolą, czy z jej sprężoną, to dla każdej z nich istnieje jedna i ta sama asymptota.

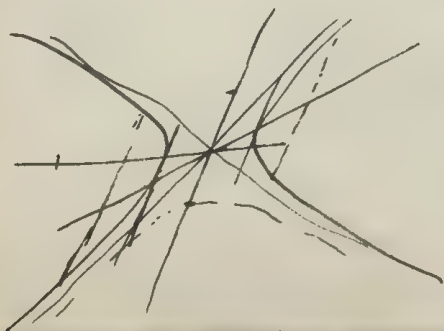
Także tutaj, odwołując się do powyższego, możemy stwierdzić:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{to dla każdej z nich}$$

istnieje jedna i ta sama asymptota

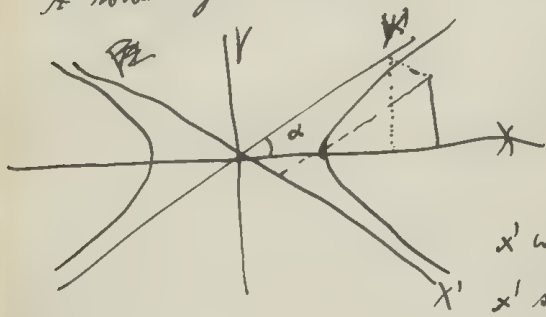
Także tutaj, odwołując się do powyższego, możemy stwierdzić:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \quad \begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0 \\ \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0 \end{cases}$$



Wzyci dowiedziemy, że równanie y dla asymptot i dla krzywej
zatem obliczamy, czy jest to równanie.

A równanie boków utworzone z ~~krzywej~~ ^{krzywej} a' b' daje kierunki asymptot (punkt 4)



Odczytujemy do ~~ustalonego~~ równania jednie osiami
spółrzędnych są asymptoty:

$$x' \cos \alpha + y' \sin \alpha = x$$

$$x' \sin \alpha - y' \cos \alpha = y$$

$$\text{zatem: } \frac{(x' + y')^2}{a^2} \cos^2 \alpha - \frac{(x' - y')^2}{b^2} \sin^2 \alpha = 1$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{b}{a} \parallel \cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \frac{a^2}{a^2 + b^2}$$

$$\sin^2 \alpha = 1 - \frac{1}{1 + \frac{b^2}{a^2}}$$

$$\frac{(x' + y')^2}{a^2} - \frac{(x' - y')^2}{b^2} \frac{a^2 \sin^2 \alpha}{a^2 \cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$\frac{(x' + y')^2}{a^2} - \frac{(x' - y')^2}{b^2} \left(\frac{b}{a} \right)^2 = \frac{a^2 + b^2}{a^2}$$

$$\underbrace{(x' + y')^2 - (x' - y')^2}_{4x'y'} = a^2 \frac{a^2 + b^2}{b^2}$$

$$x'y' = \frac{a^2 + b^2}{4}$$

$$= b^2$$

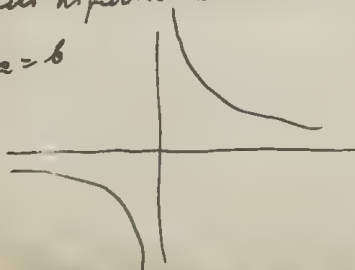
to można także wyprowadzić z analizy
bo tylko wtedy koordynaty x i y
są obrotowe.

Niech

jest hiperbola równoważna

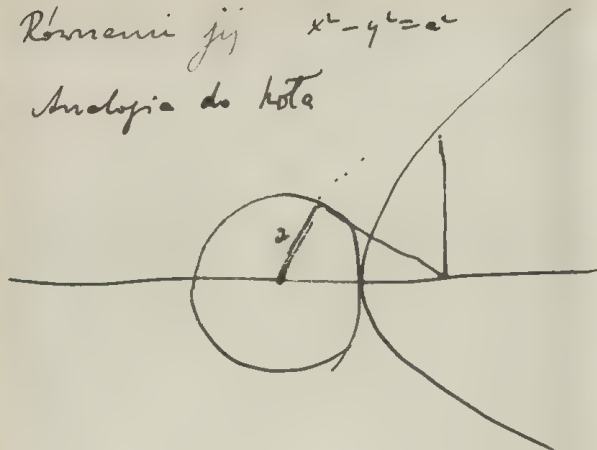
$$a = b$$

$$a = k\sqrt{2}$$



Równanie jej $x^2 - y^2 = a^2$

Analogia do kół



Jżeli się wykreśliło ośrodek
równoboczny kąt, to analogicznie
jakoś by dać inną przez równoległość
wydanych w stosunku $\frac{b}{a}$

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$

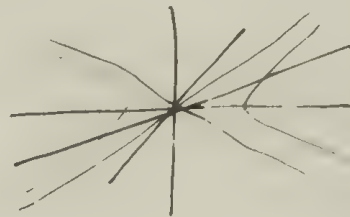
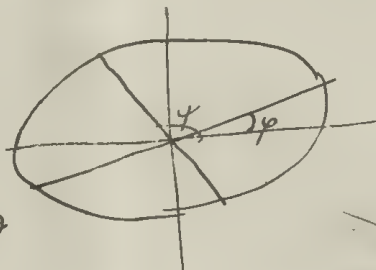
Przypomnienie:

Równanie prostej przechodzącej przez środek i jest wykreślonych pod kątem φ będzie

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13} + (a_{21}x + a_{22}y + a_{23}) \tan \varphi = 0$$

Zatem tutaj:

$$\frac{x}{a^2} \pm \frac{y}{b^2} \tan \varphi = 0 \quad \begin{matrix} \text{SL} \\ \text{bry} \end{matrix}$$



~~lub równocześnie prosta jest asymptotą~~
~~jakoś się dać wyrazić o tym drugie~~

$$\frac{y}{b^2} = \tan \varphi$$

$$\tan \varphi \tan \varphi = \pm \frac{b^2}{a^2}$$

Zatem w elipsie średnice sąsiednie tworzą z przeciętymi ośmi, w kąt. na tym samym
co ma być wyrażenie przez kąt i ośrodek
stwierdza czy może być $\varphi = \varphi$? Przy elipsie możemy, przez kąt nie możemy

$\tan \varphi = \tan \varphi = \pm \frac{b}{a} = \text{asymptoty}$; to są więc średnice ze sobą samymi się przecinają.

39

Jeżeli $\operatorname{tg} \varphi > \frac{b}{a}$ to $\operatorname{tg} \varphi < \frac{b}{a}$ zatem przy hiperboli leżą one zawsze
na przeciwnych stronach asymptot

↳ do dążeń tych średnic.

Oznaczyć przez $x' y'$, $x'' y''$ gdzie $\operatorname{tg} \varphi = \frac{y'}{x'}$ | $\operatorname{tg} \varphi = \frac{y''}{x''}$

Jeżeli wiemy $y' x'$ a szukamy $y'' x''$:

$$\left. \begin{aligned} \frac{x}{a^2} \pm \frac{y}{b^2} \frac{y'}{x'} &= 0 \\ \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} &= 1 \end{aligned} \right\} \quad x = \mp \frac{a^2}{b^2} \frac{y y'}{x'}$$

$$\left[\frac{1}{a^2} \frac{a^4}{b^4} \left(\frac{y'}{x'} \right)^2 \pm \frac{1}{b^2} \right] y^2 = 1$$

$$\left(\frac{y''}{b} \right)^2 = \frac{1}{\frac{a^2}{b^2} \frac{y'^2}{x'^2} \pm 1} = \frac{b^2 x'^2}{\pm a^2 b^2} = \left(\frac{x'}{a} \right)^2 \pm$$

$$\frac{y''}{b} = \pm \frac{x'}{a}$$

At przy hiperboli: $\frac{y''}{b} = \pm \frac{x'}{a} i$

$$\frac{x''}{a} = \pm \frac{y'}{b}$$

$$\frac{x''}{a} = \pm \frac{y'}{b} i$$

Nie potrącajmy się wtajemniczać na dotychczasowe rezultaty, aby znaleźć
poprawne równanie do nowego równania stykającego w punkcie $x' y'$

$$\frac{x x'}{a^2} + \frac{y y'}{b^2} = 1 \quad \text{a do niej wtajemniczać średnica sprężona musi być}$$

współczynniki (przechodząc przez 0) więc $\frac{x x'}{a^2} + \frac{y y'}{b^2} = 0$

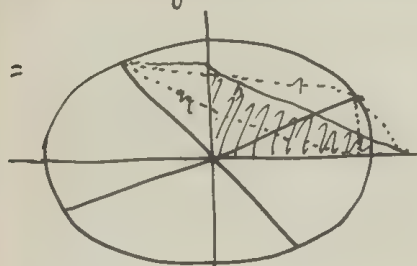
↳ do dążeń:

$$d'^2 = x'^2 + y'^2 \quad d''^2 = \mp \left(\frac{b^2}{a^2} x'^2 + \frac{a^2}{b^2} y'^2 \right)$$

$$d'^2 \pm d''^2 = \left(\frac{x'^2}{a^2} \pm \frac{y'^2}{b^2} \right) (a^2 \pm b^2) = a^2 \pm b^2$$

Wyc summa resp różnica kwadratów
średnic sprężonych = stała.

Pole równoległego boków z nich utworzonego:



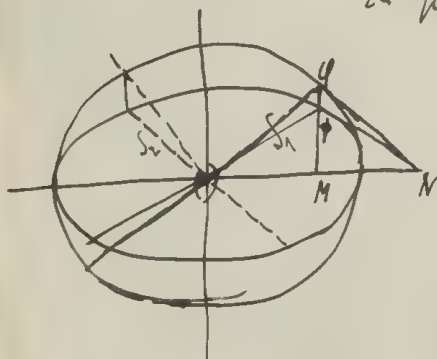
$$y''(x' + y' \frac{x''}{y''}) = y''x' + y'x''$$

$$= \frac{b^2}{a^2} x' + \frac{a}{b} y'^2 = \frac{a}{b^2} b^2 (\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2}) = ab$$

stet

Co do wykreślenia:

za pomocą koła



co bezpośrednio wynika z tego że długość cięciwy koła
albo takiej z tego że

$$\tan \angle QOM = \frac{a}{b} \tan \varphi$$

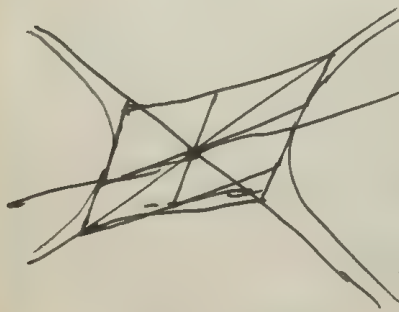
$$\tan \angle QNM = \cot \angle QOM = \frac{b}{a} \tan \varphi$$

$$\tan \angle QNM = \frac{b^2}{a^2} \tan \varphi \quad \text{wzr} \quad \tan \varphi \tan \varphi = \frac{b^2}{a^2}$$

Podobnie ale więcej skonstruowane parę hiperboli.

Hiperbole: dowolnym jęz. i ośrodku równe, z tego może wykreślenie, jeżeli
dany jeden punkt i asymptoty.

widzialny także i asymptoty z prostymi równoległymi
bokami utworzonego z średnic opozycyjnych (podzielone na
równą część przez punkt stykania) więc wartość
pozyskanego równoległego boków = 4 ab = stet.



[Niniejsze także pokazuje że słowne ośrodku stety = b^2]

Styczna w punkcie P:

$$\frac{x'x}{a^2} \pm \frac{y'y}{b^2} = 1 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{tę } y = \frac{b^2}{a^2} x \end{array} \right.$$

Normalna:

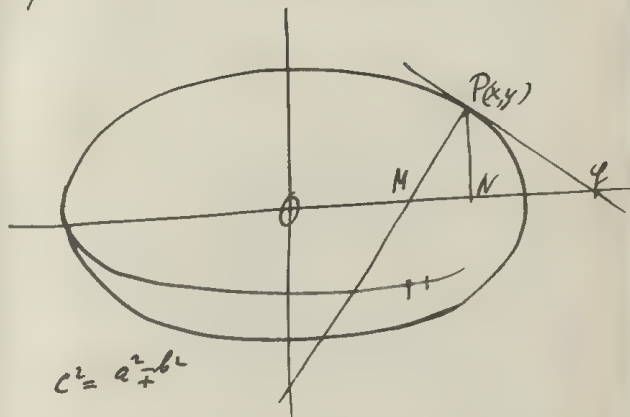
$$y - y' = \pm \frac{a^2}{b^2} (x - x')$$

$$\frac{x}{a^2} (y - y') \mp \frac{y}{b^2} (x - x') = 0$$

$$\frac{a^2(x - x')}{x} \mp \frac{b^2(y - y')}{y} = 0$$

$$\frac{a^2 x'}{x} \mp \frac{b^2 y'}{y} = c^2$$

$$c^2 = a^2 \mp b^2$$



z tego odległość $OM = \frac{c^2 x}{a^2}$ więc proporc. do x , zatem normalna dzieli odcinek punktu styczności w stałym stosunku.

Jżeli się wie o trzech $x' y'$ jako dane a $x y$ jako szukane to można wyznaczyć parametryczne =

$$c^2 x y \pm a^2 b^2 x' y' - a^2 y x' = 0$$

zatem krzywa drugiego stopnia; tam gdzie ona przecina daną krzywą można wykreślić normalną, która będzie przechodziła przez punkt $x' y'$

więc możliwych punktów przecięcia 4 (2 zawsze ujemne)

więc z punktu dowolnego można wykreślić (2 albo) 4 normalne do krzywej.

$$\text{odległość } OQ = x + y^2 \frac{a^2}{b^2 x} = \frac{a^2}{x}$$

zatem iloczyn $OM \cdot OQ = c^2 = \text{stała}$ więc jeżeli będzie parę takich punktów to one

będą te punkty $M Q$ są harmoniczne względem $\pm c$ } Ogniskowej (foci, Brennpunkte)

Tak samo Aukie względem osi Y ale tam są te opposite urojone.

Wyjournam: pils 1 0 3 2 4

$$\overline{03} \overline{04} = \overline{02}^2 \text{ to}$$

$$\frac{32}{13} = \frac{02 - 03}{02 + 03} = -\frac{42}{14} = -\frac{04 - 02}{04 + 02}$$

~~do myślenia~~ mmois: ↑ przez 02 otrzymamy

$$= \frac{02^2 - 02 \cdot 03}{02^2 + 03 \cdot 02} = \frac{03 \cdot 04 - 02 \cdot 03}{03 \cdot 04 + 03 \cdot 02} = \frac{04 - 02}{04 + 02} = \frac{24}{14} = -\frac{42}{14} \text{ typ: } \underline{\text{ham}}$$

Odległości punktu dopy od ogniska

$$y^2 = \pm \frac{b^2}{a^2} x^2 \pm b^2$$

$$r^2 = (x - ae)^2 + y^2 \quad | \quad r'^2 = (x + ae)^2 + y^2$$

$$= (x - ae)^2 \pm \frac{b^2}{a^2} x^2 \pm b^2 \quad \dots$$

$$r^2 = a^2 - 2aex + \frac{b^2}{a^2} x^2 \quad r'^2 = a^2 + 2aex + \frac{b^2}{a^2} x^2$$

$$r^2 + r'^2 = 2a^2 \quad \Rightarrow 0$$

$$r = \pm \left(a - \frac{e}{a} x \right)$$

$$r' = \left(a + \frac{e}{a} x \right) x \quad \left| \begin{array}{l} x < 0 \\ r = a - ex \\ r' = \pm (a + ex) \end{array} \right.$$

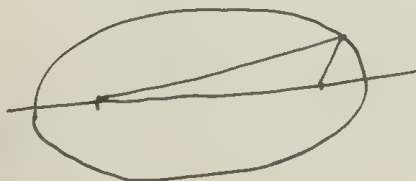
$$\text{Wz } r r' = a^2 - \left(\frac{e}{a} \right)^2 x^2 = b^2!$$

$$r \pm r' = 2a \quad // \text{ 2 typy równań określone dopy i hyp. i metody do}$$

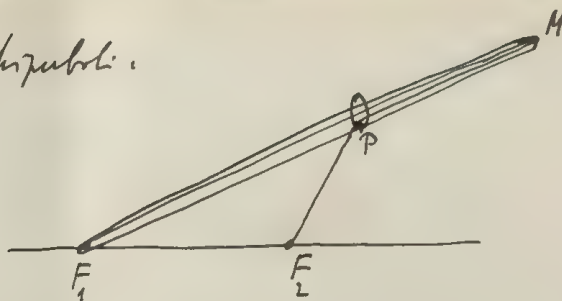
wyznaczenia z pomocą nici %.

$$\left| \frac{e}{a} = \varepsilon \right|$$

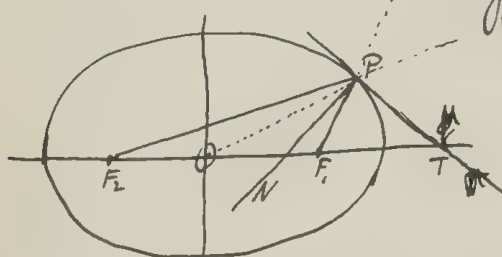
Wykreślenie elipsy:



hiperboli:



$$F_1P - F_2P = F_1P + PM - (F_2P + PM) = \text{const.}$$



Punkty NT harmonicznie podzielone przez $F_1 F_2$

$$\frac{NF_1}{NF_2} = \frac{TF_1}{TF_2}$$

$$\text{wzł} \frac{\sin NF_1}{\sin NF_2} = \frac{\sin TF_1}{\sin TF_2}$$

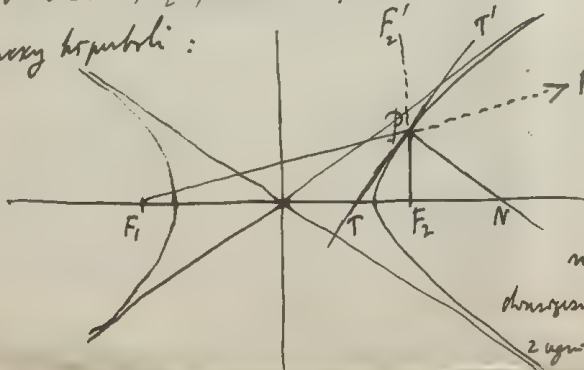
prostej NLT

$$\frac{\sin TF_1}{\sin TF_2} = \frac{\sin NF_1}{\sin NF_2} = \frac{NF_1}{NF_2}$$

zatem: $\frac{\sin NF_1}{\sin NF_2} = \frac{TF_1}{TF_2} = \frac{NF_1}{NF_2}$ wzł $\angle NPF_1 = \angle NPF_2$

Zatem jeżeli z punktu F_1 wychodzi promienie, to one wszystkie ~~przebiegają~~ wstają
tak żeby ich było przedostaty przez F_2 .

A przy hiperboli:



$$F_1PT = TPF_2$$

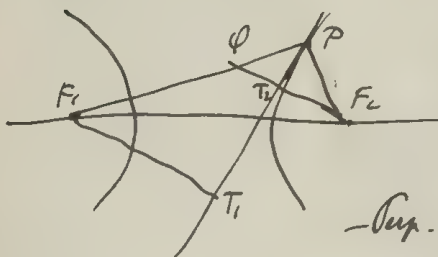
$$F_2PN = NPF_1$$

wzł (tak jak przy promieniach wychodzących z punktu F_1)

można pójść obojgami: słysząc jest
dźwiękiem, który wychodzi z punktu F_1 i wychodzi przez słuch
z punktem F_2 w dźwięku i wychodzi przy hiperboli.

To same takie tym sposobem:

Równanie styczni:



$$\frac{x x'}{a^2} + \frac{y y'}{b^2} = 1$$

W formie normalnej

$$- \text{Dop.} = \frac{x' \frac{x}{a^2}}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}}} \pm \dots = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}}}$$

$$x' = \pm a$$

$$y' = 0$$

$$F_2 T_2 = \cancel{0} - \frac{-\frac{ax}{a^2} + 1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{1}{b^4}(1 - \frac{x^2}{a^2})}} = \frac{-\frac{ax}{a^2} + 1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{1}{b^4}}} = b \sqrt{\frac{ax}{a^2} + 1}$$

$$F_2 T_2 = b \frac{-\frac{ax}{a^2} + 1}{\sqrt{1 - \frac{ax^2}{a^3}}}$$

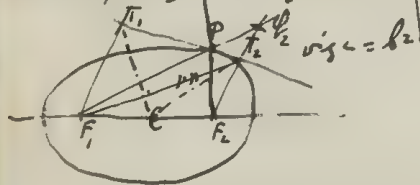
$$F_1 T_1 = b \frac{\frac{ax}{a^2} + 1}{\sqrt{1 - \frac{ax^2}{a^3}}}$$

$$\overline{F_1 T_1} \cdot \overline{F_2 T_2} = b^2$$

prosta odchyła

o tej samej z

na styczni - stały



Należy wyznaczyć wyrażenia:

$$PF_2 = r_2 = a - \frac{c}{a} x$$

$$PF_1 = r_1 = a + \frac{c}{a} x$$

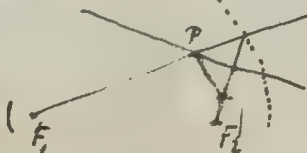
$$\text{Zatem } \frac{F_2 T_2}{F_2 P} = \frac{b}{a} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2}}} = \frac{F_1 T_1}{F_1 P} = \frac{b}{a} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2}}}$$

$$\text{Wobec czego } PF_2 T_2 = PF_1 T_1 \text{ w.} \dots$$

$$\text{Ponieważ } F_1 P \pm F_2 P = 2a = F_1 Q \pm F_2 Q = F_1 Q$$

to wszystkie punkty Q leżą na kole o promieniu $2a$ lub $F_2 = Q$, lub F_1

z tego wybranie styczni



ot prveho punktu: ot prvej pusty aq v staly strombe.

juhi strombe $\tan > 1$ hopya
 < 1 hopya

Odreknemo zbirgo' punktu na kievovby nusi puchedi' puz byz
 kievovby = yuzko

punkt ~~ky~~ kievovby: $\frac{a^2}{2}, y$

bygnovado nigo nalya:

$$\frac{x'}{e} + \frac{y y'}{b^2} = 1$$

$$\frac{\Delta}{\partial} = \frac{b^2}{e y'}$$

a tpevica z yuzkym:

$$y = \frac{y'}{e - \frac{a^2}{2}} (e - x)$$

$$\frac{\Delta}{\partial} = \frac{\cancel{y y'} y'}{e - \frac{a^2}{2}} = \frac{-y' e}{b^2}$$

$$y(e - \frac{a^2}{2}) + y' x = y' e$$

2 tpe tpe p = - tpe p' ay.

jet oia pusty. dte do naly.

z kievovby kievovby vyflya i

ky jeko' bydi pusta puchedeca puz yuzko jet harmonizmi puchedeca

puz punktu puchedeca z kievovby: kievovby = yuzko. [do bygnova =

nigiz z puchedeca punktu harmonizmy ~~vyflya~~ ^{do} bygnova vyflya punktu
 puz (z kievovby).

Problema 15 adimensional do F_1

$$x = \xi - l$$

$$y = \eta$$

$$\left(\frac{\xi^2 - 2l\xi + l^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} \right) = 1$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



$$r_1 = a - \frac{ex}{a} = a - e(l + r_1 \cos \varphi)$$

$$x = \frac{a}{e}(a - r_1)$$

$$y = r_1 \sin \varphi$$

$$\frac{(a - r_1)^2}{e^2} + \frac{r_1^2 \sin^2 \varphi}{b^2} = 1$$

$$b^2(b^2 - 2aer_1 + r_1^2) + (a^2 - b^2)r_1^2 \sin^2 \varphi = 0$$

$$b^4 - 2ab^2r_1 + r_1^2(b^2 + a^2 - b^2 \sin^2 \varphi) = 0$$

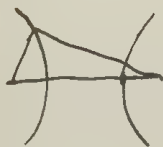
$$b^4 - 2ab^2r_1 + r_1^2(b^2 + a^2 - b^2 \sin^2 \varphi) = 0$$

$$b^4 - 2ab^2r_1 + r_1^2(b^2 + a^2 - b^2 \sin^2 \varphi) = 0$$

$$r_1^2 - 2er_1 + r_1^2 \left[\frac{b^2}{a^2} \cos^2 \varphi + 1 \right] = 0$$

$$r_1 [1 + e \cos \varphi] = a - e l = \frac{a^2 - e^2}{a} = \frac{b^2}{a} = r$$

$$r = \frac{b^2}{a(1 + e \cos \varphi)}$$



$$r_2 = \frac{a - ex}{a} = \frac{a - l}{a} = \frac{b^2}{a} = r$$

$$r [1 + e \cos \varphi] = \frac{a^2 - e^2}{a} = \frac{b^2}{a} = r$$

$$r = \frac{b^2}{a(1 + e \cos \varphi)}$$

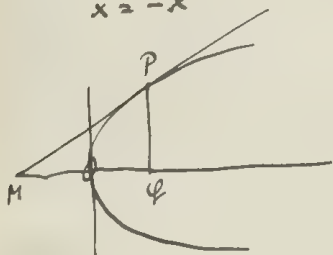
styczna do paraboli w punkcie (x, y) :

$y y' = p(x+x')$ Wzr przecięcie z osią OX w punkcie

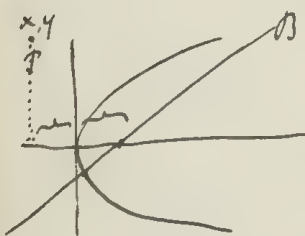
$$x = -x'$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{p}{y}$$

$$OM = -O\varphi$$



Tak samo takie jeżeli do wcięcia jako równanie biegunowy



$$\text{Punkty przecięcia: } \left. \begin{aligned} y y' &= p(x+x') \\ y'^2 &= 2px' \end{aligned} \right\}$$

$$y'^2 - 2y y' = -2px$$

$$y' = y \pm \sqrt{y^2 - 2px}$$

> 0 dla punkt. zewn.

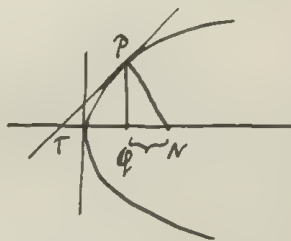
$$\text{Normalna: } y - y' = -\frac{y}{p}(x - x')$$

$$p(y - y') + y(x - x') = 0$$

$$\text{Przecięcie z osią } X: \quad p y^2 + y(x - x') = 0$$

$$x' = p + x$$

$$x' - x = p = OQ$$



Przez punkt dowolny można wykreślić 3 normalne, bo:

$$\left. \begin{aligned} p(y - y') + y(x - x') &= 0 \\ y^2 &= 2px \end{aligned} \right\} \begin{aligned} 2p^2(y - y') + y^3 - yx' &= 0 \end{aligned} \quad \begin{aligned} &\text{Równanie 3-go} \\ &\text{stopnia w } y \end{aligned}$$

Punkt leżący w odległości $\frac{p}{2}$ jest zawsze środkiem między N i T bo

$$x + \frac{p}{2} = (x + p) - \frac{p}{2} \quad ; \text{ naczynny po ognisku}$$

~~W~~ możemy tutaj bezpośrednio użyć ~~sk~~ skądś z pomocą własności harmonicznych bo drugi leży w ∞

$$\frac{N\infty}{T\infty} = - \frac{NF}{TF} = -1 \quad \text{wzr. odpowiada ten punkt drugiemu warunkowi}$$

Także z tego że $\varepsilon = 1$, bo mamy ^{przy dopie} ~~Wzrost~~ $p = \frac{b^2}{a} = \frac{a^2 - c^2}{a} = \cancel{(a-c)(a+c)}$

$$= \underbrace{(a-c)}_{OF} (1 + \varepsilon)$$

$$OF = \frac{p}{1 + \varepsilon} = \frac{p}{2}$$

$$z = \sqrt{y^2 + (x - \frac{p}{2})^2} = \sqrt{2px + x^2 - px + \frac{p^2}{4}} = x + \frac{p}{2} = [\frac{p}{2} + 2\omega y] + \frac{p}{2}$$

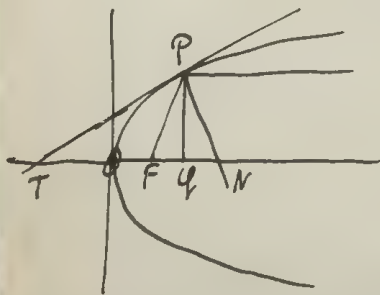
$$z = \frac{p}{1 - \cos \varphi} \quad \text{co także z dawniejszych równań wypływa.}$$

Kierownica = biegunowa ogniska $yy' = p(x + x')$

$$\cancel{yy'} = \cancel{4x + \frac{p}{2}} \quad \frac{p^2}{2} + px' = 0$$

$$x' = -\frac{p}{2}$$

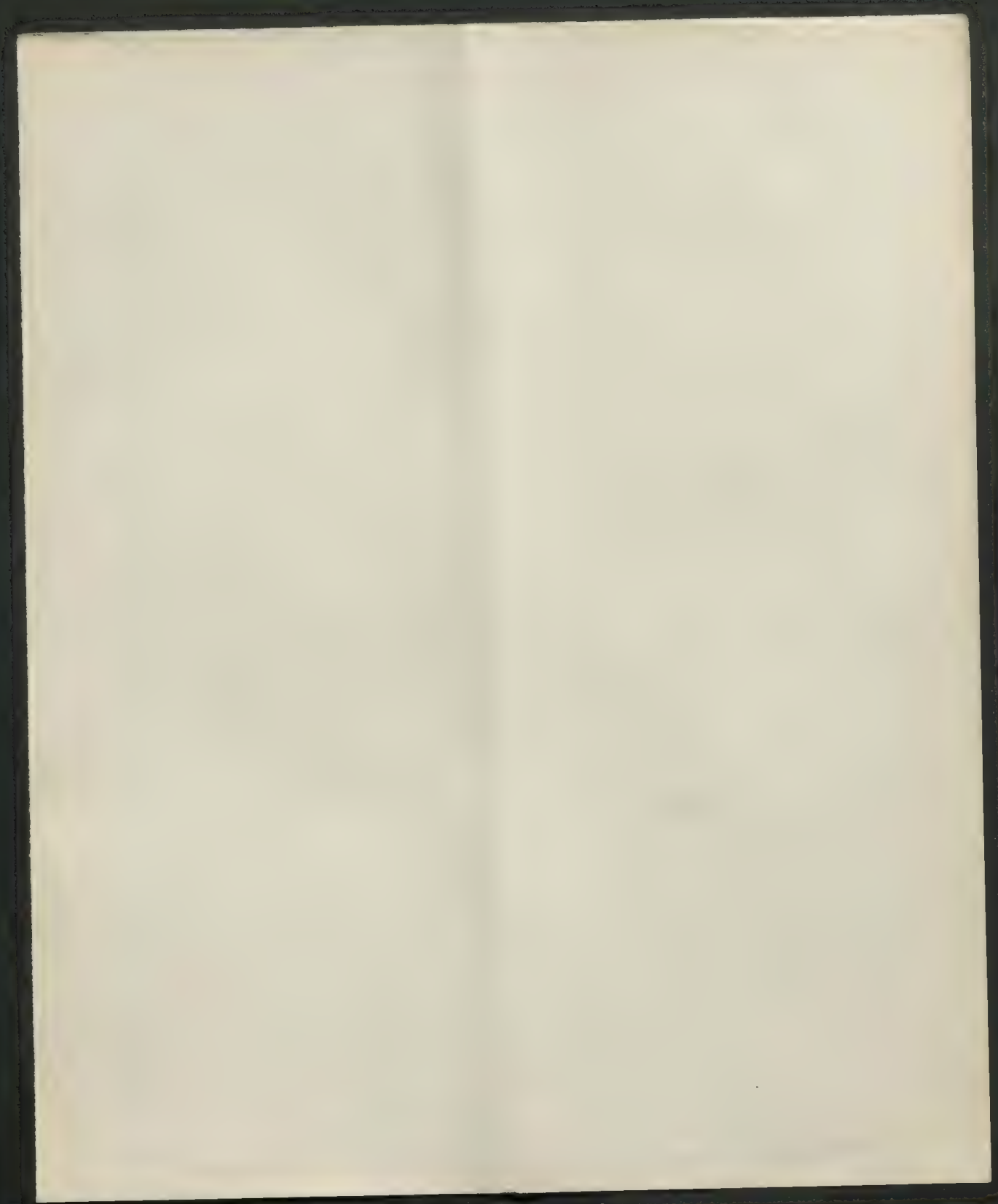
Z tego wypływa że odległość jakiegoś punktu od $F =$ odległość od kierownicy



wzr. także $TF = FP$ więc trójkąt równo

wzr. kąt $FTP = FPT$ więc styczna i normalna

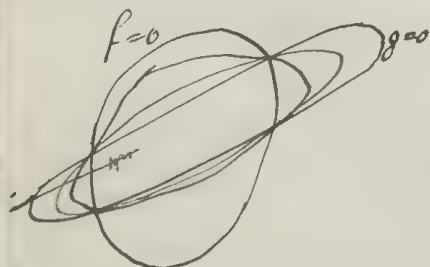
tworzą równy kąt z osią X i z x



Kilka pytań z ukladów krzywych II.

2 krzywe II przechodzą przez 4 punkty rzutu albo wrog. podlegają równaniu 4 stopnia.

Ozdanie istniejącego w układzie krzywych przechodzących przez 4 punkty to do uzupełnienia anasamby potrzebujemy 5 punktów.



4 warunków p, k

Każda krzywa $f + \lambda g = 0$

przechodzi przez te 4 punkty przecięcia

zatem jeżeli λ wzm. inne wartości: pełk krzywych

$$f = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{11}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

$$g = b_{11}x^2 + 2b_{12}xy + \dots$$

Podstawiając do tetra symbolicznie oznaczanie n.p.

Wszystkie krzywe przechodzą przez jeden punkt.

Ogólna krzywa $f + \lambda g =$

$$(a_{11} + \lambda b_{11})x^2 + 2(a_{12} + \lambda b_{12})xy + \dots$$

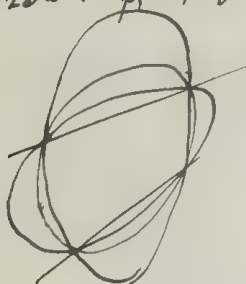
$$(a_{11} + \lambda b_{11})x^2 + (a_{12} + \lambda b_{12})(x^2 + y^2) + \dots$$

$$= \underbrace{a_{11}x^2 + a_{12}(x^2 + y^2) + \dots}_{B_1} + \lambda \underbrace{[b_{11}x^2 + b_{12}(x^2 + y^2) + \dots]}_{B_2}$$

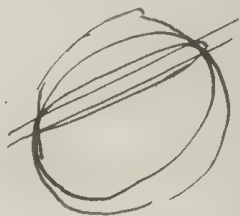
zatem tworzą one pełk promieni przechodzących przez punkt przecięcia $(0, 0)$

Jżeli Φ gausso ratóży w. łozyn dnoik wielomianów I wtedy rozpadie się ono
o 2 proste $g = D_1 D_2$

zatem jest krzyżych II przez $f: D_1 D_2 :$
— $f + \lambda D_1 D_2 = 0$



Tenże jżiki D_1 i D_2 nie wżaf są stżirżis

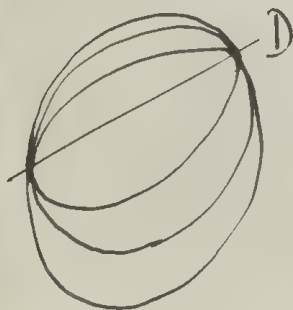


wresci jżiki $D_1 = D_2 = D$

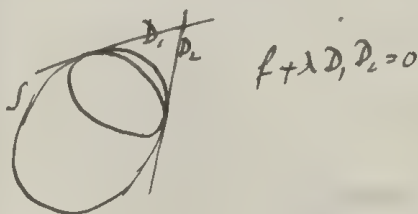
$$f + \lambda D^2 = 0$$

na ony wyzżżis krzyżych II które w tych

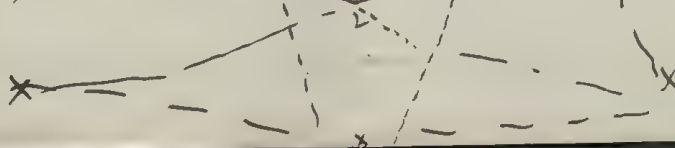
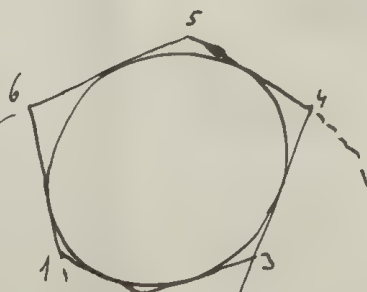
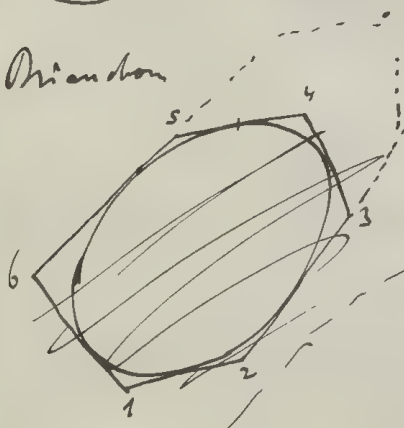
dnok punktach mżis podwójny punkt prżisic = stżis w tych punktach.



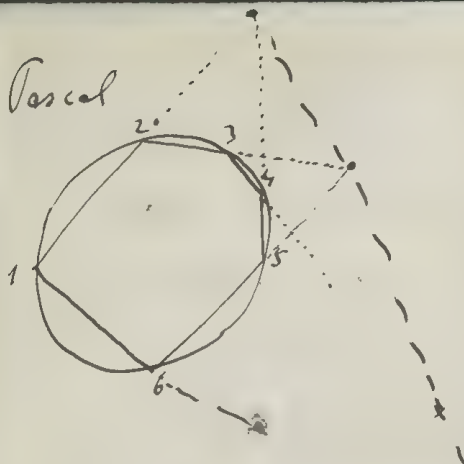
A jżiki $D_1 = S$ stżis i $D_2 = S$ stżis dż
to



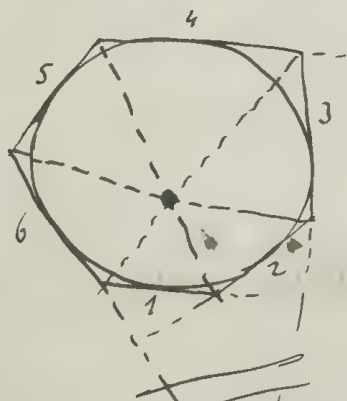
Priznchom



Pascal



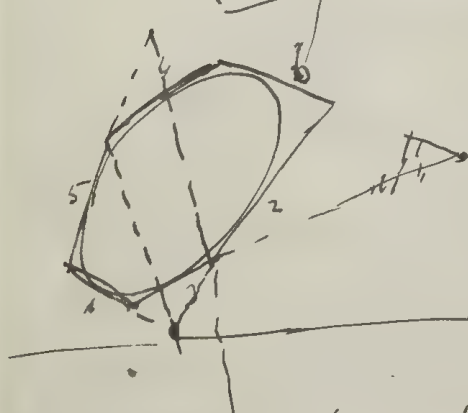
3 punkty leżą w prostej



Pascala odw.

3 proste przecinają się w jednym punkcie

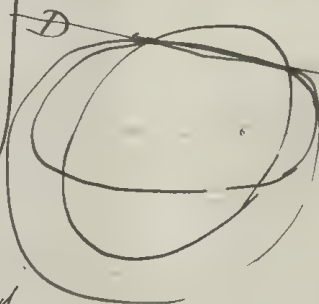
ale prosta nie przechodzi



ciężko 2 kręgi mieć 2 punkty
 = 0' drugie jest tylko dwukrotnie

Inne rodzaje układów

dwóch kręgów gdzie każdy ma 2 punkty

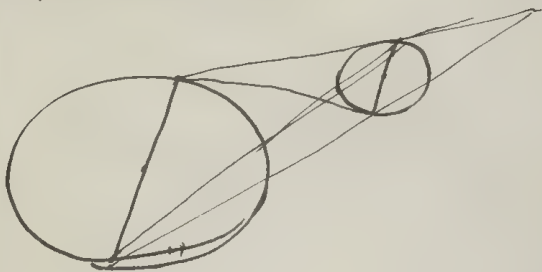


$$f + D D_i = 0$$

jako D_i = wyznacznikwzględem D = wyznacznikprosta $(f D) //$ osi układu

Tenzy rodzej ukt. dotr:

Kręgi homotetyczne = podobne i podobnie położone



Dajmy nat. że szukamy druz kręgow 2
równomi kierunkami asymptot, wtedy

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_{33} = 0$$

$$a_{11}'x'^2 + 2a_{12}'x'y' + a_{22}'y'^2 + a_{33}' = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{wzr-jedn } x = r \cos \varphi \\ x' = r' \cos \varphi \end{array} \right\} \text{ to } r^2 : r'^2 = a_{33} : a_{33}'$$

zatem średnice równoległe są proporcjonalne
a w odniesieniu do tego samego układu: $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + b_{13}x + b_{23}y + b_{33} = 0$
Można je uważać jako szczególny przypadek układu dwu kręgowych

$$\begin{aligned} \text{w } f + b_{33}'(x^2 + y^2) - \text{równanie} &= f + (b_{13} - a_{13})x + (b_{23} - a_{23})y + (b_{33} - a_{33}) \\ &= f + D_i \cdot 1 = 0 = f + (0x + 0y + 1) D_i \end{aligned}$$

wzr. $0' = 0$ = proste i niekiedy ukośne

0' drugie = ~~proste~~ 0' punktów przecięcia asymptot, oraz pierwiastkowe, albo linie

potęgowe, albo cięciwy

Naturalnie: jeżeli się będzie cięciwy proporcjonalne, zatem można przetłumaczyć je również
i otrzymać ²/brodki podobieństwo.

Do tej rozważa punkty 2 których można równocześnie wykreślić styczne do obu kręgów
jżeli ~~z~~ współrodzkowe homotetyczne to tylko a_{33} i inne

Tak samo naturalnie dla punktów powyżej trójkąt

$$r_1, r_2 = \text{Mów} \rho^2 = c^2 = \left(\frac{1}{2} MN\right)^2$$



To naszany potęga punktu względem koła $= \pi$

$$\pi = c^2 - \rho^2 = (x_0 - \alpha)^2 + (y_0 - \beta)^2 - \rho^2 = \text{Równanie koła jeżeli tam wstawimy } x_0, y_0$$

Zatem Równanie Koła $\pi = 0$

Mając geometrycznie dwa koła równych potęg względem

$$\pi_1 = 0 \quad \pi_2 = 0$$

$$\pi_1 = \pi_2 \quad \text{albo} \quad \pi_1 - \pi_2 = 0 \equiv (x_1 - \alpha_1)^2 + (y_1 - \beta_1)^2 - \rho_1^2 - [(x_1 - \alpha_2)^2 + (y_1 - \beta_2)^2 - \rho_2^2]$$

$$= 2(\alpha_2 - \alpha_1)x + 2(\beta_2 - \beta_1)y + \pi_1 - \pi_2 = 0 \quad = \text{prosta}$$

= linia potęgowa = ~~to~~ os symetrii; właściwie że styczna z jakiegoś punktu równa.

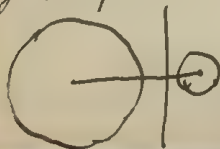
Linia nośna dwóch kół: $ty = \frac{\beta_2 - \beta_1}{\alpha_2 - \alpha_1}$ więc prosta ~~prosta~~ ^{on} prosta do linii potęgowej

Punkt przecięcia dwóch kół: potęga jego = ~~0~~ 0 wobec każdego z nich

zatem jeżeli koła przecinają się to os symetrii przebiega przez punkty przecięcia

Też przypomnijmy sobie że w układach homotetycznych nepotkających się to same ^{skierunek} wyrażenie; dla dwóch kół zawsze homotetyczne.

Jeżeli przecięcia wojem:



$$c_1^2 - \rho_1^2 = c_2^2 - \rho_2^2$$

$$c_1^2 - c_2^2 = \rho_1^2 - \rho_2^2 \quad \text{osie potęgowe przecięcia}$$

Trzy koła.

40

Oni każdy parę z nich:

$$\pi_1 - \pi_2 = 0$$

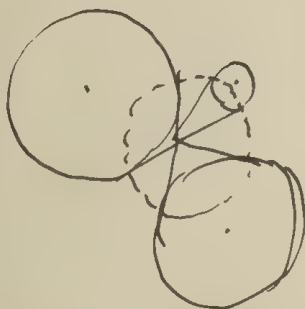
$$\pi_2 - \pi_3 = 0$$

$$\pi_3 - \pi_1 = 0$$

} wszystkie przechodzą przez jeden punkt

= środek pierwiastkowy = punkt z którego trzy różne styczne

zatem punkty styczności muszą leżeć na obwodzie koła (złotego)



To zadanie rozwiązywanie zadania „wykreślić koło które przecina prostopadle trzy dane koła.”

$$\pi_1 = 0 \quad \pi_2 = 0$$



$$\pi_1 + k \pi_2 = 0$$

jest koło przechodzące przez te dwa punkty ; oś pierwiastkowa =

linia przechodząca przez i linia środkowa jest wszystkimi kołami wspólnymi

$$\pi_1 + k \pi_2 = (\pi_1 - \pi_2) + (k+1) \pi_2$$

oś pierwiastkowa

wszystkie koła mające wspólny oś pierwiastkową

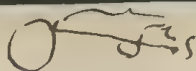
Trzeci okrąg

Ogólnie wszystkie koła przechodzące przez ten punkt przechodzą też w jednym punkcie

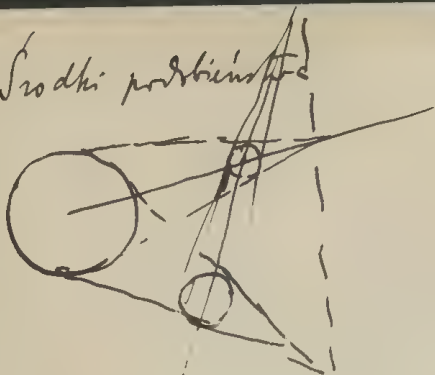
$$(1+k)(xx' + yy') - (\alpha_1 + k\alpha_2)(x' + x) - (\beta_1 + k\beta_2)(y' + y) + \pi_1 + k\pi_2 = 0$$

$$= P_1 + kP_2$$

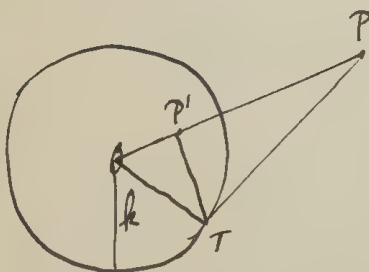
Środki podobieństwa



linia na prostej = osiach podobieństwa



Inwersja względem okręgu promieni r odcinków



$$r r' = k^2$$

$$\vartheta = \vartheta'$$

$$x: y = x': y' = .$$

$$x = \frac{y x'}{y'} = \frac{r}{r'} x' = \frac{r r'}{r'^2} x' = \frac{k^2 x'}{x'^2 + y'^2}$$

$$x' = \frac{k^2 x}{x^2 + y^2}$$

$$y' = \frac{k^2 y}{x^2 + y^2}$$

Każdemu punktowi wewnętrznemu odpowiada jeden zewnętrzny względem środka

$$\text{wzł. } OP' \cdot OP = OT^2$$

$$\frac{OP'}{OT} = \frac{OT}{OP}$$

wyskazywanie względem Δ , $P'T$ jest brylantem

krawędź $PP' = 1$ powierza to tylko odwrócić do jednolitej miary

Jżeli P ośrodek krzywej to także P będzie ośrodkiem krzywej

$$\text{N.p. } \Pi = x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$$

$$\frac{x'^2 + y'^2}{(x'^2 + y'^2)^2} - \frac{2(\alpha x' + \rho y')}{x'^2 + y'^2} + \pi = 0 = \frac{1 - 2\alpha x' - 2\rho y' + \pi}{x'^2 + y'^2}$$

$$x'^2 + y'^2 - \frac{2\alpha}{\frac{1}{\alpha'}} x' - \frac{2\rho}{\frac{1}{\rho'}} y' + \frac{1}{\pi} = 0 \quad \text{wzyci znova kot}$$

$$\alpha' = \frac{\alpha}{\pi} \quad \rho' = \frac{\rho}{\pi} \quad | \quad \pi' = \frac{1}{\pi} \quad \rho' = \frac{\alpha' + \rho'}{\pi'} = \frac{\rho'}{\pi'}$$

[wzyci inoidek nie jst odrazu do stedy munitny byi $\alpha' = \frac{\alpha}{\alpha' y' \rho'}$]

Prosty' odnosa kot: $Ax + By + C = 0$

$$A k^2 x' + B k^2 y' + C(x'^2 + y'^2) = 0 \quad \text{wzyci - przechodzi przez 0}$$

= odrazu kaden kot przechodzi przez 0 odnosa proste



$$(\alpha' - \alpha'')^2 + (\rho' - \rho'')^2 = \rho_1'^2 + \rho_2'^2 - 2\rho_1'\rho_2' \cos \varepsilon$$

$$\cos \varepsilon = \frac{-(\alpha_1' - \alpha_2')^2 + (\rho_1' - \rho_2')^2 + \rho_1'^2 + \rho_2'^2}{2\rho_1'\rho_2'}$$

A we figurze odrazu stymamy wyrazu zupetnie analityczne:

$$\cos \varepsilon' = \frac{\rho_1'^2 + \rho_2'^2 - (\alpha_1' - \alpha_2')^2 - (\rho_1' - \rho_2')^2}{2\rho_1'\rho_2'} \quad \text{a wtodajsc porzadz wyrazu}$$

stymamy in to same $\cos \varepsilon$ zote $\varepsilon = \varepsilon'$

rownokrotny przekrotanie

$$K = \int_0^1 \left(y_0 - \frac{w_0^2}{2g} \right) dx = \int_0^1 \left(y_0 - \frac{w_0^2}{2g} \right) dx$$

$$\pi_1 = 0 \quad \pi_2 = 0 \quad \pi_3 = 0$$

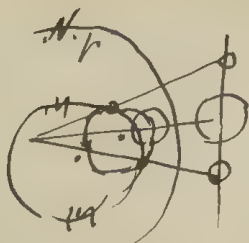
$$\pi_1 + k \pi_2 + l \pi_3 = 0 \quad \text{— tenci' kot'}$$

$$\alpha = \frac{\alpha_1 + k \alpha_2 + l \alpha_3}{1 + k + l} \quad \rho = \frac{\rho_1 + k \rho_2 + l \rho_3}{1 + k + l}$$

Skąd jednak prawdziwość tych trzech danych kot' jest ten fakt $\pi_1 = \pi_2 = \pi_3$

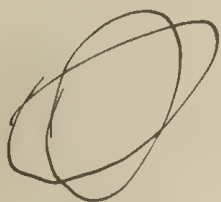
$$\text{wskaz ten faktie} \quad \pi = \frac{\pi_1 + k \pi_2 + l \pi_3}{1 + k + l} = \pi_1$$

Wskazujemy tutaj nie ma wątpliwości, że prawdziwość tych trzech danych
można przekazać i do góry; wskazuje się, że —



Wzr. umożliwia otrzymanie kręgu pierzei i 3 dane kręgi +
(= 2 dowolne pierzei)

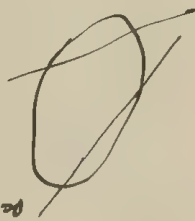
Wzrównyżne do 4 kręgów II:



$$f + \lambda g = 0$$

Ten sam system kręgów także przez

$$f + \lambda D_1 D_2 = 0$$



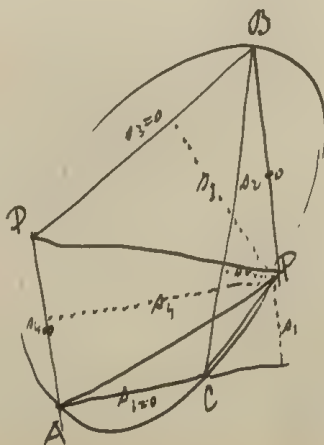
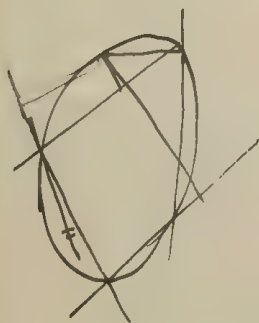
Albo przez



$$D_1 D_2 + \lambda D_3 D_4 = 0$$

Wzr. każde równanie kręgów II w tej formie

Dnoina także możemy jako odstęp jakiego punktu od punktu



$$s_1 AC = PA \cdot PC \cdot \sin \angle APC$$

$$s_2 DC = PB \cdot PC \cdot \sin \angle BPC$$

$$s_3 BD =$$

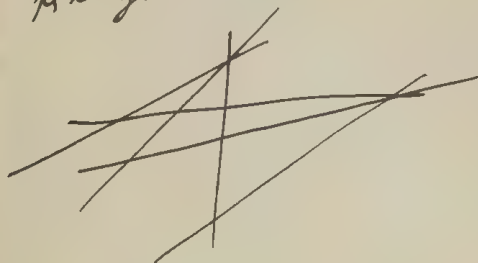
$$s_4 AD =$$

$$\frac{\sin \angle APC}{\sin \angle BPC} = \frac{\sin \angle APD}{\sin \angle BPD} = \frac{s_1 s_3}{s_2 s_4} \cdot \frac{AC}{DC} = \frac{AD}{DB}$$

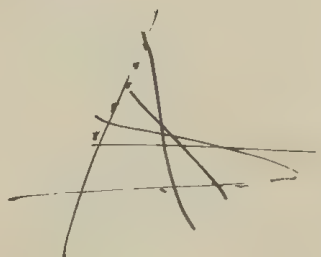
$$= \lambda \cdot \frac{AC}{DC} \cdot \frac{OD}{AO}$$

określenie miejsca geometrycznego punktu którego łącząc z 4 punktami mamy stały stosunek podziału podwójnego

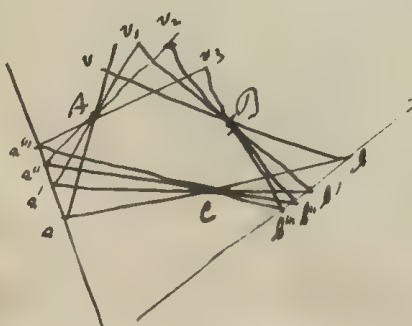
czy podobnego modułowy jest danymi
 p_1 i p_2 ^{podział} jednoznacznie



$$\begin{array}{l} g_1 w - d s_2 = 0 \\ g'_1 - d s'_2 = 0 \\ g_1 g'_2 - g'_1 g_2 = 0 \end{array}$$

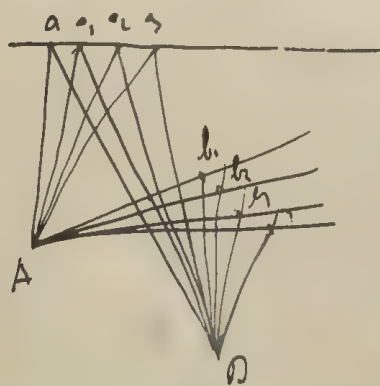


Mac Laurin



$$\begin{aligned} A(v_1, v_2, v_3) &= \\ A(a_1, a_2, a_3) &= \phi_h(c_1, c_2, c_3) = (C, h, h, h) \\ &= (D, h, h, h) = (D, v_1, v_2, v_3) \end{aligned}$$

Newton



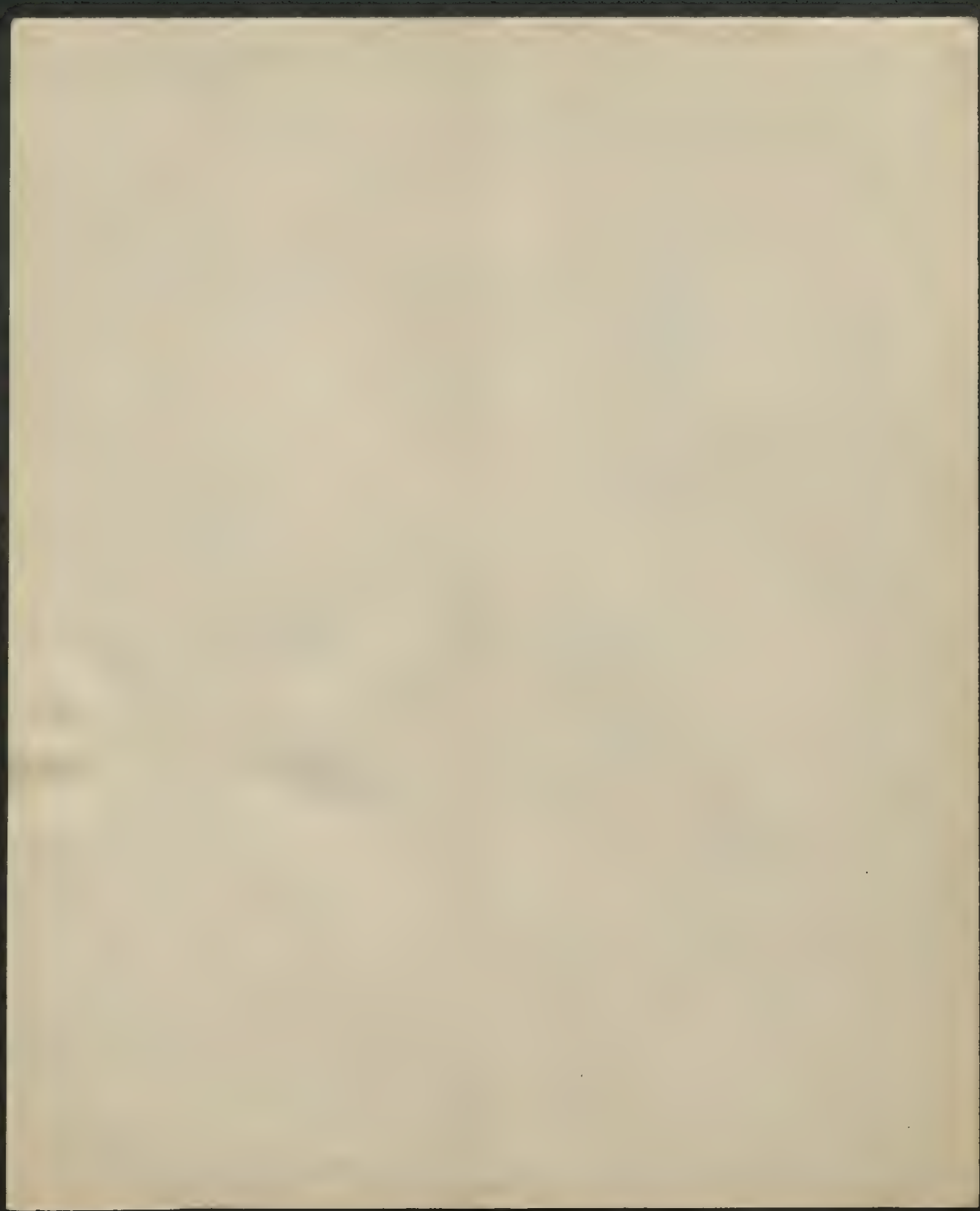
2 kąty wielokroju stają się kątami
 tak że jedno ramie ~~podziału~~ przesunie się na prostą

$$\begin{aligned} A(a_1, a_2, a_3) &= (D, a_1, a_2, a_3) \\ &= (D, h, h, h) = - - - \end{aligned}$$

Etienne:

$$a_{11}xx' + 2a_{12}(xy' + x'y) + \dots = 0$$

2 rovnice x a y jsou x' a y' stále více rovnou v x' a y' dle δ prot; musí
být 2ho stupně. což bude klas 2ej



[illegible]

Der Punkt sh^2 ist eine neue Eigenschaft, die
nicht zu sein

Berechnen wir den 2. Punktsumme

$$d^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2 r_1 r_2 \cos \varepsilon$$

$$= (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) + (x_2^2 + y_2^2 + z_2^2) - 2(x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2) =$$

$$\quad \quad \quad = r_1^2 \quad \quad \quad = r_2^2$$

$$r_1 r_2 \cos \varepsilon = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + \cos \beta_1 \cos \beta_2 + \cos \gamma_1 \cos \gamma_2)$$

$$\cos \varepsilon = \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + \cos \beta_1 \cos \beta_2 + \cos \gamma_1 \cos \gamma_2$$

$$\sin^2 \varepsilon = 1 - \cos^2 \varepsilon$$

$$= (\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \beta_1 + \cos^2 \gamma_1) (\cos^2 \alpha_2 + \cos^2 \beta_2 + \cos^2 \gamma_2) -$$

$$- (\cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + \cos \beta_1 \cos \beta_2 + \cos \gamma_1 \cos \gamma_2)^2$$

$$= \cos^2 \alpha_1 \cos^2 \beta_2 + \cos^2 \alpha_1 \cos^2 \gamma_2 - 2 \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 \cos \beta_1 \cos \beta_2 -$$

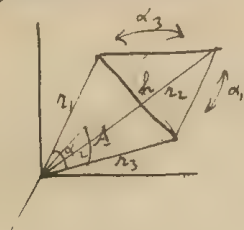
$$+ \cos^2 \alpha_2 \cos^2 \beta_1 + \cos^2 \alpha_2 \cos^2 \gamma_1 - 2 \cos \alpha_2 \cos \alpha_1 \cos \gamma_1 \cos \gamma_2 + \dots$$

$$= \left[\cos \alpha_1 \cos \beta_2 - \cos \alpha_2 \cos \beta_1 \right]^2 + \left[\cos \beta_1 \cos \gamma_2 - \cos \beta_2 \cos \gamma_1 \right]^2 + \left[\cos \gamma_1 \cos \alpha_2 - \cos \gamma_2 \cos \alpha_1 \right]^2$$

Wir sehen 1 1 2 $\cos \alpha_1 \cos \alpha_2 = 0$

1 1 2 $\varepsilon = 0$: $\cos \alpha_1 \cos \beta_2 = \cos \alpha_2 \cos \beta_1$ etc
 $\alpha_1 = \alpha_2 \dots$

Wyznaczenie



$$A(r_1, r_2) = \frac{1}{2} r_1 r_2 \sin \alpha_3$$

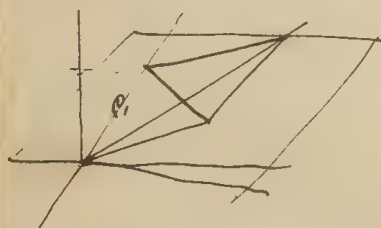
$$h = r_3 \sin A$$

$$V = \frac{1}{6} r_1 r_2 r_3 \sin \alpha_3 \sin A$$

Wzle jzeli znamy krawedzi nieznane to znowy tych

o biezemy r_1, r_2, r_3

Tesaz dajemy pewny wzrostek urozynany w inny sposob o tych samych krawedziach krawedzi przecinaja je w stosunku odleglosci puz stonami wzdlyk 2 ~~XV~~ XV, o tej samej odleglosci



aby odleglosci byly takie same musimy p_1, p_2, p_3 cz. r_1, r_2, r_3

$$\text{dajemy: } p_1: \xi_1 = r_1: x_1 \quad p_1: \eta_1 = r_2: y_1 \quad \dots$$

$$p_2: \xi_2 = r_2: x_2 \quad \dots$$

Tesaz odleglosci tego nowego wlosa = $\frac{1}{6}$ podstawa \times wysokość ξ_1

$$\text{wzrostki} = \xi_1 = \xi_2 = \xi_3$$

$$\begin{vmatrix} 1 & \xi_1 & \eta_1 \\ 1 & \xi_2 & \eta_2 \\ 1 & \xi_3 & \eta_3 \end{vmatrix} =$$

$$V = \frac{1}{6} \xi_1 (\xi_2 \eta_3 - \xi_3 \eta_2) + \xi_2 (\xi_3 \eta_1 - \xi_1 \eta_3) + \xi_3 (\xi_1 \eta_2 - \xi_2 \eta_1)$$

$$\xi_1 = \frac{r_1 p_1}{r_1} \quad \xi_2 = \frac{x_2 p_2}{r_2} \quad \eta_3 = \frac{y_3 p_3}{r_3}$$

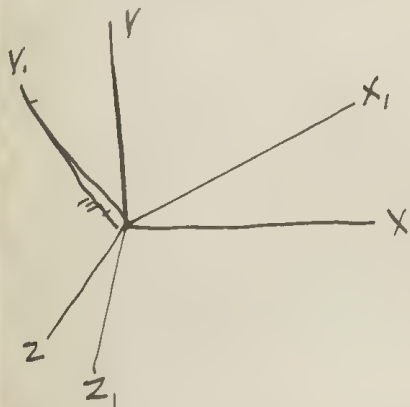
$$V = \frac{1}{6} \frac{p_1 p_2 p_3}{r_1 r_2 r_3} [r_1 (x_2 y_3 - x_3 y_2) + \dots] \quad \text{+ podobnie } p_1 p_2 p_3 = \dots$$

$$= \frac{1}{6} [r_1 [\dots] = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} r_1 & x_1 & y_1 \\ r_2 & x_2 & y_2 \\ r_3 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

A jzeli mamy krawedzi w postaci ξ to

$$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} r_1 - r_2 & x_1 - x_2 & y_1 - y_2 \\ r_2 - r_3 & x_2 - x_3 & y_2 - y_3 \\ r_3 - r_1 & x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}$$

Zanim o tem dalej postępiemy wróćmy do układu współrzędnych i postawmy sobie zadanie ~~zobaczyć~~ które wektory będą naszymi wektorami: szukamy wektorów współrzędnych:



Obydwa \perp ^{całkowicie}
 9 kątów, lecz nie dowolnych, bo muszą istnieć warunki:

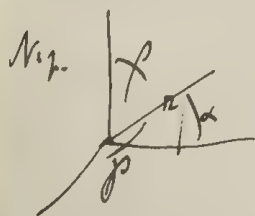
$$\begin{cases} \cos XX_1, \cos XY_1 + \cos YX_1, \cos YV_1 + \cos ZX_1, \cos ZV_1 = 0 \\ \cos XY_1, \cos XZ_1 + \cos YV_1, \cos YZ_1 + \cos ZX_1, \cos ZV_1 = 0 \\ \cos XZ_1, \cos XX_1 + \cos YZ_1, \cos YX_1 + \cos ZV_1, \cos ZX_1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos^2 XX_1 + \cos^2 YX_1 + \cos^2 ZX_1 = 1 \\ \cos^2 XY_1 + \cos^2 YV_1 + \cos^2 ZV_1 = 1 \\ \cos^2 XZ_1 + \cos^2 YZ_1 + \cos^2 ZV_1 = 1 \end{cases}$$

Względnie dowolne są tylko 3 wektory:

Jak się przemieniają jedna na drugie?

Składowe części = Suma wektorów na 3 osiach: przemierzonych przez \cos .



$$\begin{matrix} m = r \cos \alpha & \cos \alpha \\ n = r \cos \beta & \cos \beta \\ p = r \cos \gamma & \cos \gamma \end{matrix} \quad \left\{ \begin{matrix} r = m \cos \alpha + n \cos \beta + p \cos \gamma \end{matrix} \right.$$

Względnie tutaj:

$$\begin{matrix} x_1 = x \cos XX_1 + y \cos YX_1 + z \cos ZX_1 \\ y_1 = \\ z_1 = \end{matrix} \quad \left| \begin{matrix} x = x_1 \cos XX_1 + y_1 \cos XY_1 + z_1 \cos XZ_1 \\ - \\ - \end{matrix} \right.$$

Tercz równy do równania

$$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_1 - x_4 & x_2 - x_4 & x_3 - x_4 \\ y_1 - y_4 & y_2 - y_4 & y_3 - y_4 \\ z_1 - z_4 & z_2 - z_4 & z_3 - z_4 \end{vmatrix}$$

spierające punkty 1, 2, 3 tylko

w pierwszej płaszczyźnie, a z powodu symetrii

tak samo i 4, (wypis płaszczyzny muszę zrobić)

Wzór będzie to wyrażenie kształtu

wyrażony za pomocą równań i mian. j.

przebiegów

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}$$

$$V = Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D$$

Jako że = 0 to będzie warunkiem żeby x_1 leżało w płaszczyźnie 2, 3, 4, zatem

$$\text{równanie płaszczyzny: } Ax + By + Cz + D = 0$$

Takie o inny sposób: wykreślić sobie prostą równą 0 na płaszczyźnie

i przedstawić ją do podwójnej diagonali; wtedy każdy punkt płaszczyzny musi mieć równy odstęp od 0 i od tego punktu (a, b, c)

$$x^2 + y^2 + z^2 = (a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2$$

$$\text{zatem równanie: } ax + by + cz - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} = 0$$

a wprowadzając odstęp p i kąt λ, μ, ν

$$a = 2p \cos \lambda$$

$$b = 2p \cos \mu$$

$$c = 2p \cos \nu$$

$$x \cos \lambda + y \cos \mu + z \cos \nu - p = 0 \quad (\text{forma normalna})$$

Analogia z równaniem prostej w płaszczyźnie,

faktycznie jeżeli założenie że $r = 90^\circ$: $x \cos \lambda + y \cos (90 - \lambda) - p = 0$

Stąd przez p :

$$\frac{x}{\frac{p}{\cos \lambda}} + \frac{y}{\frac{p}{\cos \mu}} + \frac{z}{\frac{p}{\cos \nu}} - 1 = 0 \quad \text{czyli} \quad \frac{x}{m} + \frac{y}{n} + \frac{z}{q} = 1 \quad (\text{forma symetryczna})$$

Ogólnie można znaleźć punktowe normalne:

$$\begin{array}{l|l} kA = m\lambda & \lambda^2 (1)^2 \\ kO = m\mu & \mu^2 (1)^2 \\ kC = m\nu & \nu^2 (1)^2 \\ kD = -p & \end{array}$$

$$k^2 [A^2 + O^2 + C^2] = 1$$

$$k = \frac{1}{\sqrt{A^2 + O^2 + C^2}}$$

$$\frac{Ax + Oy + Cz + D}{\sqrt{A^2 + O^2 + C^2}} = 0$$

• w symetrycznej drodze przez D: $\frac{D}{A} = m$ st.

$Ax + Oy + Cz = 0$ przez dwa punkty 0

$Ax + Oy + D = 0$ w 2 dowolne więc równoległa do osi Z

$Ax + Cz + D = 0$ „ „

$Oy + Cz + D = 0$ „ „

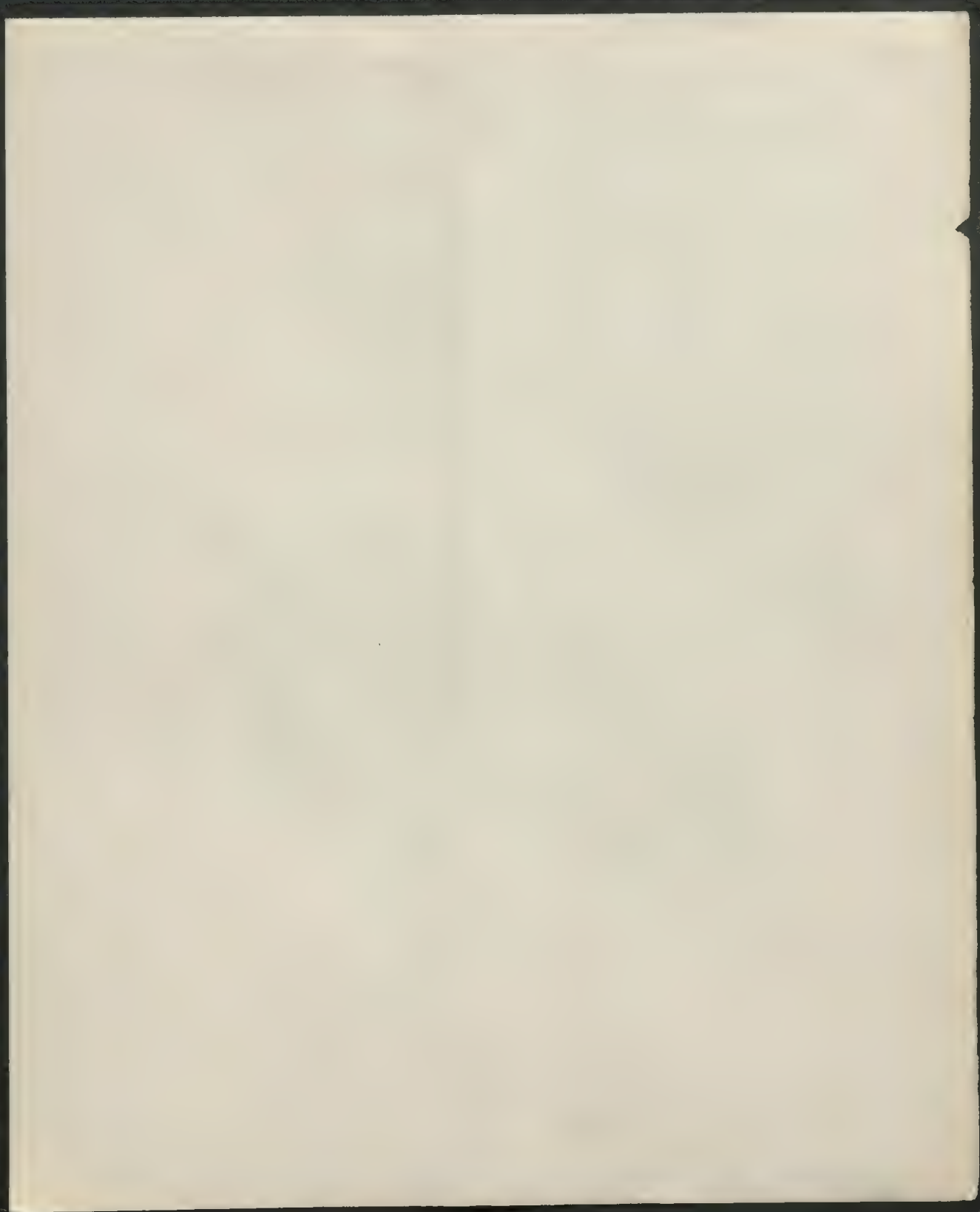
$Ax + D = 0$

prostopadła do X

normalne $m = -\frac{1}{u}$ $n = -\frac{1}{v}$ $p = -\frac{1}{w}$ np. st. na płaszczyźnie

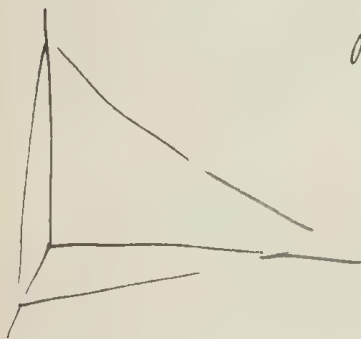
stwierdzenie normalne $ux + vy + wz + 1 = 0$ ✗

dejaż im większy wartości o stwierdzenia x y z st. = normalne punktu



$$F(x, y, z) = 0 \quad \text{poziwierać na}$$

$$F(u, v, w) = 0 \quad \text{klasę } n \quad \text{brędnie ustade, } F_{\text{ang}}$$



Odległość punktu x, y, z od płaszczyzny $x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0$

$$\frac{x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma}{\sqrt{\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma}} = p' = 0$$

$$\delta = p^2 - p'^2 = x^2 \cos^2 \alpha + y^2 \cos^2 \beta + z^2 \cos^2 \gamma - p^2$$

u ogólniej formie

$$\delta = \frac{Ax' + By' + Cz' + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

u, v, w

$$\delta = \frac{ux' + vy' + wz' + 1}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}} = \frac{E}{\sqrt{\dots}}$$

Kąt między dwiema pł. = kąt między normalnymi.

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

$$A'x + B'y + C'z + D' = 0$$

$$\cos \varepsilon = \cos \alpha \cos \alpha' + \cos \beta \cos \beta' + \cos \gamma \cos \gamma'$$

$$= \frac{AA' + BB' + CC'}{\sqrt{(A^2 + B^2 + C^2)(A'^2 + B'^2 + C'^2)}}$$

$$\perp AA' + BB' + CC' = 0$$

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}$$

$$E_1 = ux + vy + wz + 1 = 0$$

$$E_2 = u_2x + v_2y + w_2z + 1 = 0$$

$$E_1 + \lambda E_2 = (u_1 + \lambda u_2)x + \dots = 0 \quad \text{punktów przez punkt przecięcia}$$

$$\lambda = -\frac{E_1}{E_2} = -\frac{\delta_1}{\delta_2} \frac{\sqrt{u_1^2 + \dots}}{\sqrt{u_2^2 + \dots}} = +\frac{\sqrt{u_1^2 + \dots}}{\sqrt{u_2^2 + \dots}} \frac{E_1 E_2}{E_1 E_2}$$

$$P_1 \equiv x_1 u + y_1 v + z_1 w + 1 = 0 \parallel P_2 -$$

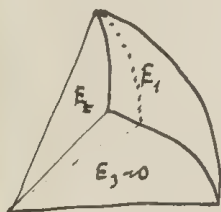
$$P_1 + \lambda P_2 = (x_1 + \lambda x_2) u + \dots + (1 + \lambda) = 0$$

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}$$

$$\lambda = \frac{P_1 P_2}{P_1^2}$$

Jżeli 3 płaszczyzny albo 3 punkty $R_1, R_2, R_3 = 0$ i te przecinają się w jednym punkcie albo leżą na 1 prostej to możemy znaleźć takie x, y, z że

$$R_1 x_1 + R_2 x_2 + R_3 x_3 = 0$$



$$E_{12} \equiv E_1 - E_2 = 0$$

$$E_{12}' \equiv E_1 + E_2 = 0$$

$$E_{23} \equiv E_2 - E_3 = 0$$

$$E_{31} \equiv E_3 - E_1 = 0$$

$$= 0 \quad = 0$$

przechodzą przez 3 punkty. Jeżeli dwusiecznych kąta bryłowego trójkątnego przechodzi po 3 przez 1 prostą.

W podobny sposób można także pokazać że dwusieczne płaszczyzny boków i że prostopadłe płaszczyzny na 3 strony przecinają się w 1 punkcie (analogicznie z geometryczną płaszczyzną i trójkątem).

Jżeli 4 płaszczyzny przechodzą przez 1 prostą:

$$\begin{array}{cccc} E_1 & E_2 & E_1 - \lambda E_2 & E_1 - \kappa E_2 \\ & & E_3 \uparrow & E_4 \uparrow \end{array} \quad \text{to nazywamy stosunek}$$

$$\frac{\sin E_1 E_3}{\sin E_3 E_2} : \frac{\sin E_1 E_4}{\sin E_4 E_2} = \frac{\lambda \sqrt{-}}{\kappa \sqrt{-}} = \frac{\lambda}{\kappa}$$

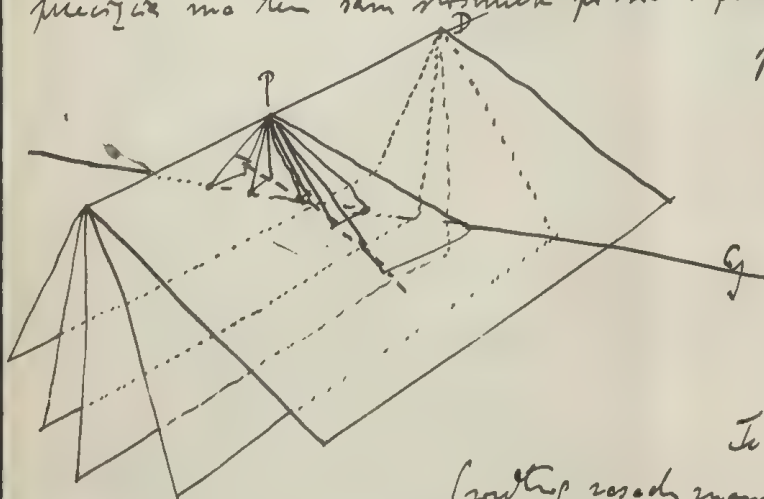
stosunkiem podziatu podwójnego.

Tak samo jeżeli 4 punkty na prostej to

$$(P_1, P_2, P_3, P_4) \dots = \frac{P_1 P_3}{P_3 P_2} : \frac{P_1 P_4}{P_4 P_2}$$

Pole płaszczyzny = zbiór płaszczyzn przechodzących przez punkt, przez punkta
= zbiór punktów leżących na ~~tej~~ prostej.

Jeżeli jakieś bryły proste są spłaszczone przesłaną płaszczyzną, to przez punkta przecięcia ma ten sam stosunek podziatu podwójnego.



przez 4 punktowy płaszczyzn

prostopadły do D

wierci w punkcie P prostopadły do D

i znajdujący przez punkta na G na tej płaszczyźnie.

Jeżeli ten sam stosunek podziatu

(wzajemny rozkład mian i mianownika) w 2 i tutaj...

2 ^{proste} płaszczyzn $E_1 - \lambda E_2$

$E'_1 - \lambda E'_2$ narysowany ⁷ jednostronnie

jeżeli to samo λ :

Wzajemna geometria ich przecięcia z porównaniem Δ dla układu 3 płaszczyzn: $E_1 E'_1 - E_2 E'_2$

Równanie prostej

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \quad \text{jako punkt i dwóch stycznych}$$

$$\begin{cases} u_1x + v_1y + w_1z + 1 = 0 \\ u_2x + v_2y + w_2z + 1 = 0 \end{cases} \quad \text{jako ~~prosta~~ równica dwóch punktów} \begin{cases} x_1, y_1, z_1 \\ x_2, y_2, z_2 \end{cases}$$

Jżeli prosta przechodzi przez punkt a, b, c

$$A_1a + B_1b + C_1c + D_1 = 0$$

$$A_1(x-a) + B_1(y-b) + C_1(z-c) = 0 \quad \left| \begin{matrix} C_2 \\ -C_1 \end{matrix} \right.$$

$$A_2(x-a) + B_2(y-b) + C_2(z-c) = 0$$

$$(A_1C_2 - A_2C_1)(x-a) + (B_1C_2 - B_2C_1)(y-b) = 0$$

$$\underbrace{(A_1C_2 - A_2C_1)}_l (x-a) = \underbrace{(B_1C_2 - B_2C_1)}_m (y-b) = \underbrace{(C_1C_2 - C_2C_1)}_n (z-c)$$

$$\frac{x-a}{l} = \frac{y-b}{m} = \frac{z-c}{n}$$

$$\frac{x-a}{\frac{A_1C_2 - A_2C_1}{l}} = \frac{y-b}{\frac{B_1C_2 - B_2C_1}{m}} = \frac{z-c}{\frac{C_1C_2 - C_2C_1}{n}}$$

$$\frac{x-a}{l} = \frac{y-b}{m} = \frac{z-c}{n}$$

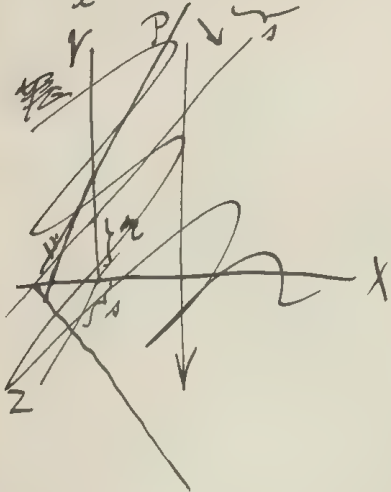
równanie symetryczne prostej

a parametry: $\frac{x-a}{\lambda} = \frac{y-b}{\mu} = \frac{z-c}{\nu}$

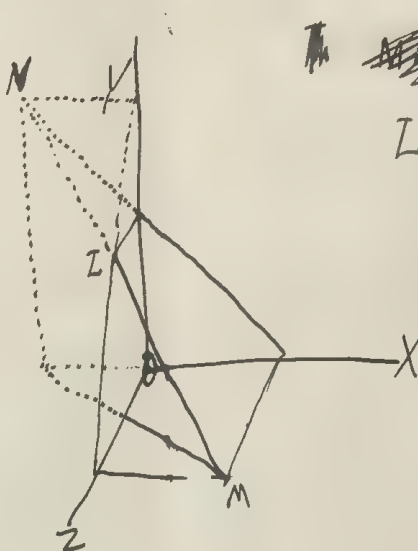
to równanie dwóch stycznych

$$y = \frac{m}{l}x + \left(b - \frac{m}{l}a\right)$$

$$z = \frac{n}{l}x + \left(c - \frac{n}{l}a\right)$$



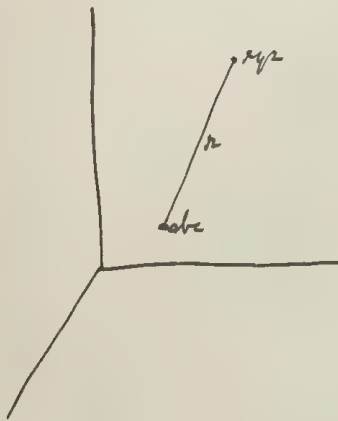
Richtungen vordringte also erzeugte



$$L \begin{cases} 0 \\ r \\ s \end{cases}$$

$$M \begin{cases} -\frac{r}{m} \\ 0 \\ -\frac{r}{m} + s \end{cases}$$

$$N \begin{cases} -\frac{s}{n} \\ -\frac{sm}{n} + r \\ 0 \end{cases}$$



$$x-a = r \cos \alpha$$

$$y-b = r \cos \beta$$

$$z-c = r \cos \gamma$$

$$\left. \begin{aligned} x-a &= r \cos \alpha \\ y-b &= r \cos \beta \\ z-c &= r \cos \gamma \end{aligned} \right\} r = \frac{x-a}{\cos \alpha} = \frac{y-b}{\cos \beta} = \frac{z-c}{\cos \gamma}$$

$$\frac{x-a}{l} = \dots$$

$$\cos \alpha = kl$$

$$\cos \beta = kn$$

$$\cos \gamma = ka$$

$$k^2 = \frac{1}{l^2 + m^2 + n^2}$$

$$\cos \alpha = \frac{l}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}$$

$$\cos \beta = \frac{m}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}} \quad \cos \gamma = \frac{n}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}$$

we formulie erzeugte

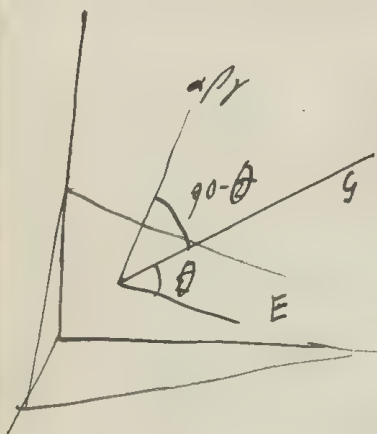
$$y = Mx + R$$

$$z = Nx + S$$

$$\frac{x}{1} = \frac{y-R}{M} = \frac{z-S}{N}$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + M^2 + N^2}} \quad \cos \beta = \frac{M}{\sqrt{1 + M^2 + N^2}} \quad \cos \gamma = \frac{N}{\sqrt{1 + M^2 + N^2}}$$

Kg + mgydny ~~dwie~~ prosta a ston wyznac



$$\frac{x-a}{l} = \frac{y-b}{m} = \frac{z-c}{n}$$

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

$$E \left\{ \cos \alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \quad \cos \beta = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \quad \dots \right.$$

$$G \left\{ \cos \alpha' = \frac{l}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}} \quad \dots \right.$$

$$\sin \theta = \cos \alpha \cos \alpha' + \cos \beta \cos \beta' + \cos \gamma \cos \gamma'$$

$$= \frac{Al + Bm + Cn}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}$$

wzyc warunkiem izby $G \parallel E$: $Al + Bm + Cn = 0$

a izby $G \perp E$ musi byc $\alpha = \alpha'$ $\beta = \beta'$ $\gamma = \gamma'$

$$\text{wzyc} \quad \frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n} = \cos \theta$$

Warunek izby prosta licza na ston wyznac:

$$\left. \begin{array}{l} Al + Bm + Cn = 0 \\ Ae + Bb + Cc + D = 0 \end{array} \right\}$$

Kgt možný dvíma prostumi

57

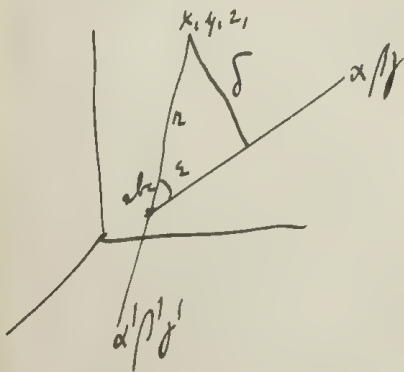
$$\cos \theta = \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + \cos \beta_1 \cos \beta_2 + \cos \gamma_1 \cos \gamma_2$$

$$= \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}$$

$$S_1 \perp S_2 \text{ jeli } l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0$$

$$S_1 \parallel S_2 \quad \frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}$$

Odbyti' p'unktu x, y, z , v' p'uty' $\frac{x-a}{l} = \frac{y-b}{m} = \frac{z-c}{n}$



$$\delta = r \sin \alpha$$

$$= r \sqrt{[(\cos \beta \cos \gamma' - \cos \gamma \cos \beta')]^2 + \dots}$$

$$= \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$$

$$r \cos \alpha' = x_1 - a \quad r \cos \beta' = y_1 - b \text{ etc.}$$

$$\delta = \frac{[m(x_1 - a) - n(y_1 - b)]^2 + \dots}{\sqrt{m^2 + n^2 + \dots}}^{\frac{1}{2}}$$

Równanie prostej prostopadłej do stycznej, przechodzącej przez punkt $P \begin{Bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{Bmatrix}$

$$\text{czy } \frac{x-a}{A} = \frac{y-b}{B} = \frac{z-c}{C} \quad \text{powinno być } \frac{l}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \text{ i t.d.}$$

Równanie tangencji P_1, P_2

$$\cos \alpha = \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{\dots}} \quad \cos \beta = \frac{y_1 - y_2}{\sqrt{\dots}} \quad \cos \gamma = \frac{z_1 - z_2}{\sqrt{\dots}}$$

$$\frac{x-x_1}{x_1-x_2} = \frac{y-y_1}{y_1-y_2} = \frac{z-z_1}{z_1-z_2}$$

Równanie stycznej \perp ~~prostej~~ G w punkcie P_1

~~styczna~~

$$\frac{x-a}{l} = \frac{y-b}{m} = \frac{z-c}{n} \quad \cos \alpha = \frac{l}{\sqrt{\dots}} \quad \cos \beta = \frac{m}{\sqrt{\dots}} \quad \cos \gamma = \frac{n}{\sqrt{\dots}}$$

$$\# (x-x_1)l + (y-y_1)m + (z-z_1)n = 0$$

Równanie stycznej przez P_1 równoległej do E_1, E_2

$$A(x-x_1) + B(y-y_1) + C(z-z_1) = 0$$

$$Al_1 + Bm_1 + Cn_1 = 0$$

$$Al_2 + Bm_2 + Cn_2 = 0$$

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0$$

Albo implikuje:

$$\begin{cases} x-x_1 + \frac{B}{A}(y-y_1) + \frac{C}{A}(z-z_1) = 0 \\ l_1 + \frac{B}{A}m_1 + \frac{C}{A}n_1 = 0 \\ l_2 + \frac{B}{A}m_2 + \frac{C}{A}n_2 = 0 \end{cases} \Bigg\} \frac{B}{A} =$$

Podobnie otrzymamy przez $G_1 \perp$ do E_1

Najprostsza odpowiedź możemy ~~Wz~~ G_1, G_2

$$G_1: \frac{x-a_1}{l_1} = \frac{y-b_1}{m_1} = \frac{z-c_1}{n_1}$$

$$G_2: \frac{x-a_2}{l_2} = \frac{y-b_2}{m_2} = \frac{z-c_2}{n_2}$$

$$\left. \begin{aligned} A a_1 + B b_1 + C c_1 + D &= 0 \\ A l_1 + B m_1 + C n_1 &= 0 \\ A l_2 + B m_2 + C n_2 &= 0 \\ A(x-a_1) + B(y-b_1) + C(z-c_1) &= 0 \end{aligned} \right\} \text{prostopadła przez } G_1 \text{ i } G_2$$

$$\begin{vmatrix} x-a_1 & y-b_1 & z-c_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x-a_1)(m_1 n_2 - m_2 n_1) + (y-b_1)(n_1 l_2 - n_2 l_1) + (z-c_1)(l_1 m_2 - l_2 m_1) = 0$$

Wz formuły normalnej:

$$x(m_1 n_2 - m_2 n_1) + y(n_1 l_2 - n_2 l_1) + z(l_1 m_2 - l_2 m_1) = [a_1(m_1 n_2 - m_2 n_1) + b_1(n_1 l_2 - n_2 l_1) + c_1(l_1 m_2 - l_2 m_1)]$$

$$\sqrt{(\quad)^2 + (\quad)^2 + (\quad)^2}$$

Wz formuły normalnej
Wz formuły normalnej i punktów a_1, b_1, c_1 :

$$(a_2 - a_1)(m_1 n_2 - m_2 n_1) +$$

$$\sqrt{\quad}$$

Warunek aby S_1, S_2 są przemiennie

Wtedy ta objętość $= 0$

$$(a_2 - a_1)(m_1 n_2 - m_2 n_1) + (b_2 - b_1)(n_1 l_2 - m_1 l_1) + (c_2 - c_1)(l_1 m_2 - l_2 m_1) = 0$$

Takie wyrażenie:

Przekształćmy je

$$A x + B y + C z + D = 0$$

$$A a_1 + B b_1 + C c_1 + D = 0$$

$$A a_2 + B b_2 + C c_2 + D = 0$$

$$A l_1 + B m_1 + C n_1 = 0$$

$$A l_2 + B m_2 + C n_2 = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} A x + B y + C z + D = 0 \\ A a_1 + B b_1 + C c_1 + D = 0 \\ A a_2 + B b_2 + C c_2 + D = 0 \\ A l_1 + B m_1 + C n_1 = 0 \\ A l_2 + B m_2 + C n_2 = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} A(a_1 - a_2) + B(b_1 - b_2) + C(c_1 - c_2) = 0 \\ \end{array}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 - a_2 & b_1 - b_2 & c_1 - c_2 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

Rozwiązanie równań

53

$$\begin{array}{lcl} a_{11}x + a_{12}y + \dots & = b_1 & A_{11} \\ a_{21}x + a_{22}y + \dots & = b_2 & A_{21} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x + a_{n2}y + \dots & = b_n & A_{n1} \end{array} \quad \times \Delta = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & & & \\ \vdots & & & \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Jeżeli $\Delta = 0$: $x = y = z = \dots = \infty$

gdyż jeżeli tak $\begin{vmatrix} b_1 & \dots \end{vmatrix} = 0$

co nastąpi (jeżeli $b \geq 0$) jeżeli dwa równania takie same, zatem jedno skreślamy
stąd pozostanie tylko $(n-1)$ równań, więc nie ~~nie~~ wystarczą do rozwiązania

Równanie jest dwusłowne.

$$\begin{array}{lcl} a_{11}x + a_{12}y + \dots & = 0 & A_{11} \\ a_{21} & = 0 & A_{21} \end{array} \quad \Delta x = 0 \text{ st.}$$

Wtedy jeżeli $\Delta \geq 0$ to $x = y = \dots = 0$

Jeżeli zaś $\Delta = 0$:

$$\left. \begin{array}{lcl} a_{11} + a_{12} \frac{y}{x} + \dots & = 0 \\ a_{21} + a_{22} \frac{y}{x} + \dots & = 0 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} + a_{n2} \frac{y}{x} + \dots & = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} n-1 \text{ równań, zatem jedno równanie skreślamy} \\ \text{ale można wyliczyć tylko stosunki } \frac{y}{x} \text{ st.} \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} a_{11} + a_{12} \frac{y}{x} + \dots & = & A_{n-1} \frac{y_2}{x_1} = A_{n-2} \\ a_{11} + a_{13} + \dots & = & A_{n-1} \frac{y_3}{x_1} \text{ st.} \\ & & = A_{n-3} \end{array}$$

$$\text{Wtedy } x_1 : x_2 : x_3 : \dots = A_{n-1} : A_{n-2} : A_{n-3} \text{ st.}$$

$$\cancel{a_{11} + a_{12} + a_{13} + \dots}$$

To uzupełnić równanie jęz. z dwoma stronami równania

$$\Delta = 0 = a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + \dots + a_{in} A_{in} = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} + \dots + a_{1n} A_{1n} = 0 \\ \vdots \\ a_{n1} A_{11} + a_{n2} A_{12} + \dots + a_{nn} A_{nn} = 0 \end{array} \right\}$$

zatem jęz. $x_1 = \lambda A_{11}$
 $x_2 = \lambda A_{12}$ etc. to pytanie
 \vdots
 $x_n = \lambda A_{1n}$

Np.

4. Planujemy: $x_1 E_1 + x_2 E_2 + x_3 E_3 + x_4 E_4 = 0$ - co nam się da...

$$\left. \begin{array}{l} E_1 = 0 = A_1 x + 0_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \\ E_2 = 0 = A_2 x + 0_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \\ E_3 = 0 \\ E_4 = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{przebiega się jednym punktem} \\ \text{zatem wszystkie równania muszą być} \\ \text{zgodne} \end{array}$$

zatem $\left| \begin{array}{cccc} A_1 & 0_1 & C_1 & D_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_n & 0_n & C_n & D_n \end{array} \right| = 0$

$$\left| \begin{array}{cccc} A_1 x + 0_1 y + C_1 z + D_1 & 0_1 & C_1 & D_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_n x + 0_n y + C_n z + D_n & 0_n & C_n & D_n \end{array} \right| = 0$$

Ad mamy: $A_{11} E_1 + A_{21} E_2 + \dots = 0$
 $x_1 E_1 + x_2 E_2 + \dots = 0$

4. Potencjały nie zmieniają się $\varphi_1 = \varphi_2$ 50

Wtedy potencjały jest tej postaci w formie:

~~R~~ $E = \kappa_1 E_1 + \dots + \kappa_4 E_4$ bo 4 równanie wystarczą do określenia E .

5. ~~Potencjały trójwymiarowe~~

wartości $E_1, E_2, E_3, E_4 =$ spotęgowane uogólnienie

Jedną w formie normalnej to one są one są "objętości" potęgą dla punktu A i

inaczej $= x_1, x_2, x_3, x_4$
Normalnie nie są mieszalne; objętości uogólnieniem:

$$x_1 A_1 + x_2 A_2 + x_3 A_3 + x_4 A_4 = 3V$$

Zupełnie spotęgowane są szczególnie ich przypadki t.j. gdzie $E_1 = \infty$

Godzinie takie są spotęgowane, potęgą.

Wzrostomian jednowymiarowy drugiego stopnia: $a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \dots + 2a_{12}x_1x_2 + \dots$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots \\ + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots) \\ + \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \end{pmatrix} \quad \left. \vphantom{\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots \\ + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots) \\ + \dots \end{pmatrix}} \right\} a_{ik} = a_{ki}$$

$$= \sum_i x_i \sum_k a_{ik} x_k$$

Wypytano także z Euler

$$f_m = x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \dots$$

Podkreślenie liniowe ogólnie:

$$x_1 = l_{11}x_1 + l_{12}x_2 + \dots + l_{1n}x_n$$

$$x_2 = l_{21}x_1 + l_{22}x_2 + \dots + l_{2n}x_n$$

$$\left. \vphantom{\begin{matrix} x_1 = l_{11}x_1 + l_{12}x_2 + \dots + l_{1n}x_n \\ x_2 = l_{21}x_1 + l_{22}x_2 + \dots + l_{2n}x_n \end{matrix}} \right\} \text{ macierz jądrowa } L \equiv \begin{vmatrix} l_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & l_{nn} \end{vmatrix} \geq 0$$

= zmiennik = moduł punktu.

$$X_1 = \lambda_{11} x_1 + \lambda_{21} x_2 + \dots + \lambda_{n1} x_n$$

$$X_2 = \lambda_{12} x_1 + \lambda_{22} x_2 + \dots + \lambda_{n2} x_n$$

$$\lambda_{ik} = \frac{L_{ik}}{L}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \dots & \lambda_{1n} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \dots & \lambda_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{n1} & \lambda_{n2} & \dots & \lambda_{nn} \end{vmatrix} = \frac{L^{n-1}}{L} = \frac{1}{L}$$

metodyczne jwili:

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \dots + \lambda_n^2 \quad \text{do znalezienia}$$

$$\lambda_1^2 = \lambda_{11}^2 + \lambda_{21}^2 + \dots + \lambda_{n1}^2$$

$$X_1^2 [l_{11}^2 + l_{12}^2 + \dots + l_{1n}^2] + X_2^2 [l_{21}^2 + l_{22}^2 + \dots + l_{2n}^2] + \dots +$$

$$+ X_1 X_2 [l_{11} l_{21} + l_{12} l_{22} + \dots] + \dots = X_1^2 + X_2^2 + \dots$$

$$\text{Wtedy: } \sum_i l_{ik}^2 = 1 \quad \sum_i l_{ik}^2 l_{im}^2 = 0 \quad n \geq m$$

wektor

$$\frac{n(n-1)}{2}$$

$$\text{wektor } n + n \frac{(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2} \text{ wektor}$$

2 typy macierzy odwzajemnie perpendykularne l_{12}, l_{21} etc.

$$X_2 = l_{12} x_1 + l_{22} x_2 + \dots + l_{n2} x_n$$

$$\text{skąd } l_{12} = l_{21} \quad \text{zatem } L = 1$$

$$\text{Np. } x' = x \omega(x'x) + y \omega(x'y) + z \omega(x'z)$$

$$y' = x \omega(y'x) + y \omega(y'y) + z \omega(y'z)$$

$$z' = x \omega(z'x) + y \omega(z'y) + z \omega(z'z)$$

metodyczne do ujedynienia i ujedynienia

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$$

$$\text{Stąd } \sum l_{ik}^2 =$$

$$\omega^2(x'x) + \omega^2(x'y) + \omega^2(x'z) = 1$$

$$\omega^2(y'x) + \omega^2(y'y) + \omega^2(y'z) = 1$$

$$\omega^2(z'x) + \omega^2(z'y) + \omega^2(z'z) = 1$$

$$\omega x'y \omega \omega x'z + \omega y'y \omega y'z + \omega z'y \omega z'z = 0$$

etc

Kiedy wiadomo, że jednorodny F , ma nie wyrażający się przez x , y , z wartości funkcji jednorodnych I .

$$f(x_1, x_2, \dots) = \sum_i \sum_k a_{ik} x_i x_k = a_{11} x_1^2 + a_{12} x_1 x_2 + \dots$$

$$x_i = \sum_n l_{in} X_n$$

$$f = \sum_i \sum_k a_{ik} \left(\sum_n l_{in} X_n \right) \left(\sum_s l_{ks} X_s \right)$$

$$= \sum_i \sum_k \sum_n \sum_s a_{ik} l_{in} l_{ks} X_n X_s$$

$$= \sum_n \sum_s \sum_i \sum_k a_{ik} l_{in} l_{ks} X_n X_s$$

$$= \sum_n \sum_s X_n X_s \underbrace{\sum_i \sum_k a_{ik} l_{in} l_{ks}}_{A_{ns} = A_{sn}}$$

$$= A_{11} X_1^2 + A_{12} X_1 X_2 + A_{13} X_1 X_3 +$$

$$+ A_{21} X_1 X_2 + A_{22} X_2^2 + A_{23} X_2 X_3 +$$

$$A_{11} = a_{11} l_{11}^2 + a_{12} l_{11} l_{21} + a_{13} l_{11} l_{31} +$$

$$+ a_{21} l_{21} l_{11} + a_{22} l_{21}^2 + \dots$$

+

$$\text{Jedyną wartość } A_{ns} = 0 \quad n \neq s$$

$$\text{to } = A_{11} X_1^2 + A_{22} X_2^2 + \dots + A_{nn} X_n^2$$

wtedy zatem $\frac{1}{2} n(n-1)$ warunków zatem niekonieczna ilość warunków
 ale jeżeli postanowimy złożyć je wprost = postać, to wyrażenie oznacza, że
 tam niekonieczny $\frac{1}{2} n(n+1)$ warunków

Wzręty to są jednak sprzeczne (z powyższymi równaniami).

Np.

$$f = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3$$

$$x_1 = l_{11}X_1 + l_{12}X_2 + l_{13}X_3$$

$$x_2 = l_{21}X_1 + l_{22}X_2 + l_{23}X_3$$

$$x_3 = l_{31}X_1 + l_{32}X_2 + l_{33}X_3$$

$$l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 = 1 \quad | \quad l_{12}l_{13} + l_{22}l_{23} + l_{32}l_{33} = 0$$

$$l_1^2$$

$$l_3l_1$$

$$l_2^2$$

$$l_1l_2$$

$$\sum a_{ik} l_{i1} l_{k1} =$$

$$a_{11}l_{11}^2$$

$$\left(a_{11}l_{11}l_{11} + a_{22}l_{12}l_{21} + a_{33}l_{13}l_{31} + a_{12}(l_{12}l_{21} + l_{22}l_{11}) + a_{13}(l_{13}l_{31} + l_{33}l_{11}) + a_{23}(l_{23}l_{31} + l_{33}l_{21}) \right) = 0$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x_1} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = f_1(x_1, x_2, x_3)$$

$$a_{11}l_{11} + a_{12}l_{21} + a_{13}l_{31} = f_1(l_{11}, l_{21}, l_{31})$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x_2} = a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = f_2(x_1, x_2, x_3)$$

$$a_{12}l_{11} + a_{22}l_{21} + a_{23}l_{31} = f_2(l_{11}, l_{21}, l_{31})$$

$$\begin{cases} l_{12} f_1(l_{11}, l_{21}, l_{31}) + l_{22} f_2(l_{11}, l_{21}, l_{31}) + l_{32} f_3(l_{11}, l_{21}, l_{31}) = 0 \\ l_{13} f_1(l_{11}, l_{21}, l_{31}) + \\ l_{23} f_2(l_{11}, l_{21}, l_{31}) + \\ l_{33} f_3(l_{11}, l_{21}, l_{31}) = 0 \end{cases}$$

$$l_{12} f_1(l_{13}, l_{23}, l_{33}) + l_{22} f_2 + l_{32} f_3 = 0$$

$$l_{12} l_{13} + l_{22} l_{23} + l_{32} l_{33} = 0$$

$$l_{12} l_{31} + l_{22} l_{21} + l_{32} l_{31} = 0$$

$$\begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ l_{13} & l_{23} & l_{33} \\ l_{11} & l_{21} & l_{31} \end{vmatrix} = 0$$

$$f_1 l_{12} + f_2 l_{22} + f_3 l_{32} = 0$$

$$f_1 [l_{12} l_{32} - l_{32} l_{12}] = f_2 [l_{22} l_{32} - l_{32} l_{22}]$$

$$f_1 \sim l_{13}$$

$$\frac{f_1(l_{13}, l_{23}, l_{33})}{l_{13}} = \frac{f_2(l_{13}, l_{23}, l_{33})}{l_{23}} = \frac{f_3(l_{13}, l_{23}, l_{33})}{l_{33}} = \lambda_1$$

$$\frac{f_1(l_{1i}, l_{2i}, l_{3i})}{l_{1i}} = \frac{f_2(l_{1i}, l_{2i}, l_{3i})}{l_{2i}} = \frac{f_3(l_{1i}, l_{2i}, l_{3i})}{l_{3i}} = \lambda_i$$

$$\left. \begin{aligned} (a_{11} - \lambda_i) l_{1i} + a_{12} l_{2i} + a_{13} l_{3i} &= 0 \\ a_{21} l_{1i} + (a_{22} - \lambda_i) l_{2i} + a_{23} l_{3i} &= 0 \\ a_{31} l_{1i} + a_{32} l_{2i} + (a_{33} - \lambda_i) l_{3i} &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda_i & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda_i & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda_i \end{vmatrix} = 0$$

czy rzeczywiste są urojone?

s_1 i s_2 ~~stwierdzenie~~ sprzeczne, także l_1 i l_2

$$l_1 = \alpha + i\beta \quad m_1 = \alpha' + i\beta'$$

$$l_2 = \alpha - i\beta \quad m_2 = \alpha' - i\beta'$$

$$l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0 = \alpha^2 + \beta^2 + \alpha'^2 + \beta'^2 + \alpha''^2 + \beta''^2 = 0$$

nie może być zerem $\alpha = \alpha' = \beta = \beta' = 0$ co jednak nie może być bo $l_1 + m_1 = 1$

zatem wszystkie rzeczywiste

zatem także spotygnięcia z dr. będą rzeczywiste;

wyjątek jeżeli 2 równa albo 3 równa pierwiastki, wtedy nie można znaleźć 3 na poziomie rotacji

Podobnie $n = (n-1)$ kowariancji

Ćwiczenie II

$$a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + \dots + 2a_{12} x_1 x_2 + 2a_{13} x_1 x_3 + 2a_{14} x_1 x_4 + 2a_{23} x_2 x_3 + 2a_{24} x_2 x_4 + \dots = 0$$

$$x = \frac{x_1}{x_4} \quad y = \frac{x_2}{x_4} \quad z = \frac{x_3}{x_4}$$

$$a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + \dots + 2a_{12} x_1 x_2 + 2a_{13} x_1 x_3 + \dots + a_{44} x_4^2 = 0$$

Przekształćmy równanie II w kwadrat normowanych $N_1, N_2 = c$

(bo spotygnięcia przy x^2 i y^2 będą takie same)

Prosta przecina II w 2 punktach:

$$P'(x_1' \dots x_4') \quad P''(x_1'' \dots x_4'') \quad \text{punkt na prostej } \lambda x_i' + \mu x_i''$$

$$f = x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \dots = x_1 f_1 + x_2 f_2 + x_3 f_3 + x_4 f_4$$

$$f_1 = a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 + a_{14} x_4$$

$$f_2 = a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 + a_{24} x_4$$

$$f_3 =$$

$$f_4 =$$

$$x_i = \lambda x_i' + \mu x_i''$$

$$f_i = \lambda f_i' + \mu f_i''$$

$$(\lambda x_1' + \mu x_1'')(\lambda f_1' + \mu f_1'') + (\lambda x_2' + \mu x_2'')(\lambda f_2' + \mu f_2'') + \dots = 0$$

$$\lambda^2 (x_1' f_1' + x_2' f_2' + \dots) + \lambda \mu (x_1' f_1'' + x_2' f_2'' + \dots) + \mu^2 (x_1'' f_1'' + x_2'' f_2'' + \dots) = 0$$

$f' \qquad \qquad \qquad f''$

$$\lambda^2 f' + 2\lambda\mu (x_1'' f_1' + \dots x_4'' f_4') + \mu^2 f'' = 0$$

Drugiego stopnia wzgl. do $\frac{\lambda}{\mu}$ jest 2 punkty

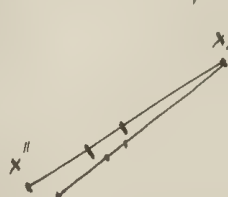
$$x = \frac{x_1}{x_4} = \frac{(\frac{\lambda}{\mu})x_1' + x_1''}{\lambda}$$

Jżeli $x_1'' f_1' + \dots x_4'' f_4' = 0$ to $(\frac{\lambda}{\mu})^2 f' + f'' = 0$

$$\frac{\lambda}{\mu} = \pm \sqrt{\frac{f''}{f'}}$$

2. stopnia punkty x

x	$x \pm$
y	$x' \pm f'$
z	$x'' \pm f''$



stopniach podzielnego
 $\frac{(x) \pm x'}{f'} = -1$

Jżeli P' jest punkt 2 stopnia wychodzi on z promieni to na każdej promieniu będącym woli 4 punkty harmoniczne jeżeli P' punkty P'' co do

użytych równań: $x_1 f_1' + x_2 f_2' + \dots x_4 f_4'$

Płaszczyzna
- brynowa (miejscu pro...)

Także odwrotnie:

$$x_1'' f_1' \equiv \underbrace{x_1' f_1'' + \dots + x_4' f_4''}_{\text{wzrosty w } P' \text{ leży na biegunowej punktu } P''} = 0$$

Wzrosty w P' leży na biegunowej punktu P''

Wzrosty w P'' leży na biegunowej punktu P'

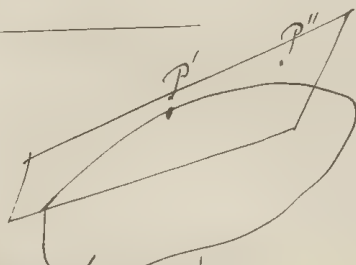
Jżeli punkt P' porusza się po płaszczyźnie to biegunowa jego obraca się kółko biegnące tej płaszczyzny

Jżeli P' po prostu to biegunowa jego ~~po~~ ^{koło} drugiej płaszczyzny

= proste sprzężone

Jżeli P' leży na powierzchni samej

$$x_1' f_1' + x_2' f_2' + \dots + x_n' f_n' = 0 \quad \text{to}$$



punkt P'' = punkt sprzężony (pomocni leży na biegunowej)

zatem prosta P'' przecina powierzchnię w 2 punktach harmonicznych do $P'P''$

t.j. w dwóch punktach nieskończenie bliskich

Zatem jest to płaszczyzna styczna

P' = punkt styczności

Wzrosty w P' leży na biegunowej punktu P'

$$x f_1(x' y' z' 1) + y f_2(x' y' z' 1) + 2 z f_3(x' y' z' 1) + f_4(x' y' z' 1) = 0$$

Normalna ma równanie:

$$\frac{x - x'}{f_1(x' y' z' 1)} = \frac{y - y'}{f_2(x' y' z' 1)} = \frac{z - z'}{f_3(x' y' z' 1)}$$

zadani: zadaný prostorový křivkový do společného bodu v ∞ kterého 58

zadaný: $\frac{x}{l} = \frac{y}{m} = \frac{z}{n} = 1$

$$\frac{x''}{l} = \frac{y''}{m} = \frac{z''}{n} = 1$$

$$x' = l^2$$

$$y' = m^2$$

$$z' = n^2$$

$$x f_1(l, m, n, 1) + y f_2(l, m, n, 1) + z f_3(l, m, n, 1) + f_4(l, m, n, 1) = 0$$

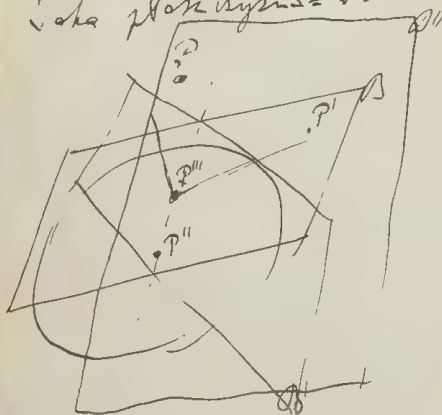
podle toho pro z a $z=0$

$$(q_{11}l + q_{12}m + q_{13}n)x + (q_{21}l + q_{22}m + q_{23}n)y + (q_{31}l + q_{32}m + q_{33}n)z = 0$$

$$= (q_{11}x + q_{12}y + q_{13}z + q_{14})l + (q_{21}x + q_{22}y + q_{23}z + q_{24})m + (q_{31}x + q_{32}y + q_{33}z + q_{34})n = 0$$

Už je vidět, že l, m, n dostane to musíme mít 3 rovnice dle bodu l, m, n

Tato prostorová = úsečka, přechodná rovnice rovnice pro úsečku pov.



zvolíme z toho samé spoustu
zvolíme bodů v

je-li P, P', P'' a ∞ to P'' v bodě tedy = 3 prostorové úsečky

zvolíme spoustu; odvíjí se do bodů jediných bodů prostých, prostých a
pro = úsečky spousty

Ogólnie ~~we~~ w nierówności = model powierzchni białej i wielkiej kuli
 dający, jeśli $= 0$ dla jakiegś białego punktu $x' y' z'$ ~~to~~
~~to~~ a $x' y' z' = \infty$ to mamy zachować równość

$$f'_1 = a_{11} x'_1 + a_{12} x'_2 + a_{13} x'_3 + a_{14} x'_4 = 0$$

$$f'_2 = a_{21} x'_1 + a_{22} x'_2 + a_{23} x'_3 + a_{24} x'_4 = 0$$

$$f'_3 =$$

$$\text{...}$$

to

} zatem

$$a_{11} x + a_{12} y + a_{13} z + a_{14} = 0$$

$$a_{12} x + \dots$$

znajdziemy taki punkt P'

który jest środkiem ~~współdługości~~ P''

Tamte równanie z osobą z 3 sterczących kątów punktów $x = \infty$
 $y = \infty$
 $z = \infty$

1) albo
 przekroczy się w 1 punkcie

al. w skończonej odległości $= \frac{x_0}{A_{41}} = \frac{y_0}{A_{42}} = \frac{z_0}{A_{43}} = \frac{1}{A_{44}}$

al. w nieskończonej odległości. jeżeli $A_{44} = 0$ (= przekroczy się z $A_{41} \cdot z_0$)

2) wzdłuż prostej

prosta środkowa

$$+y_1 = A_{42} = A_{43} = A_{44} = 0$$

to równanie jest

$$a_{23} x - a_{23} y_4 = a_{34} y - a_{31} a_{24} = a_{12} z - a_{12} a_{34}$$

gdzie $a_{ik} =$ ~~to~~ a_{ik} dotyka do a_{ik} w A_{44}

(wzłowie)

3) wzdłuż sterczący

to jeżeli się schodzą razem

albo jeżeli jedna lub więcej
 białe w nieskończonej odległości

al. jeżeli $a_{13} = a_{21} = a_{32} \mid a_{23} a_{41} = a_{31} a_{42} = a_{12} a_{43}$

Ładunek 1 punkt, 2 napięć, 3 na pr. 36 stopni.

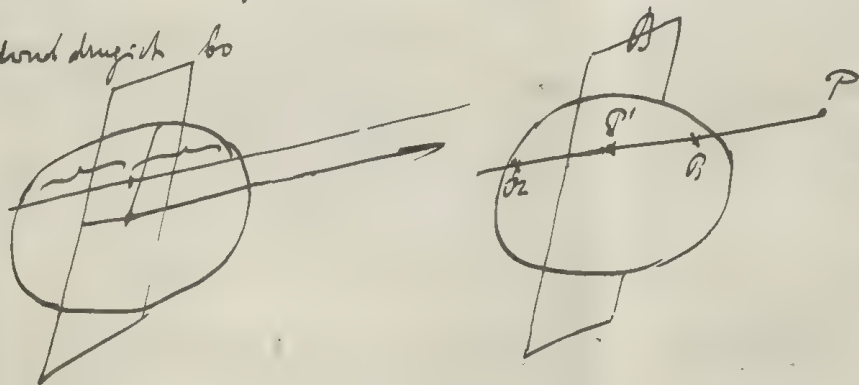
4 punkty spęziona 2 których 1 w środku,

stąd 3 inne muszą być ∞ , ale kłami ich oznacza =

3 średnice spęziona (3 stopnie doświadczenia)

~~we~~ cięciwy równoległe 2 jedną średnicę są przesłane w płaszczyźnie przez płaszczyznę indukcyjną

dowodzących to



$$\frac{P'P_1}{P'P_2} = - \frac{PP_1}{PP_2} = - \frac{PP_1}{PP_1 + P_1P_2}$$

$$\lim_{PP_2 \rightarrow \infty} = -1 \parallel \lim P_2P' = P'P,$$

Wzł 2 tego tobie : stosunek równoległe 2 indukcyjną (1,2) w punkcie ^{połączenia} średnicy (3) jest stały.

Tobie wprost : jeżeli 3 średnice tobie są przez indukcję są przesłane w płaszczyźnie to średnice spęziona to środk i 3 punkty ∞ będą 4 brzośmy spęziona.

Tobie średnice spęziona które są \perp do siebie = oryginalne.

3 pyzime:

$$(a_{11}l_1 + a_{12}m_1 + a_{13}n_1)x + (a_{12}l_1 + a_{22}m_1 + a_{23}n_1)y + (a_{13}l_1 + a_{23}m_1 + a_{33}n_1)z = 0$$

l_2

l_3

Pivota unni coluini brenti 2, 3 - colu

$$A_1 l_2 + B_1 m_2 + C_1 n_2 = 0$$

$$A_1 l_3 + B_1 m_3 + C_1 n_3 = 0$$

$$\text{str. } \left\{ \begin{array}{l} a_{11}l_2l_3 + a_{12}m_2m_3 + a_{13}n_2n_3 + a_{23}(m_2n_3 + m_3n_2) + a_{31}(n_2l_3 + n_3l_2) \\ + a_{12}(l_2m_3 + l_3m_2) = 0 \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l|l|l} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}w = 0 & a_{23} & a_{23} \\ a_{12}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24}w = 0 & -a_{13} & . \\ a_{13}x + a_{23}y + a_{33}z + a_{34}w = 0 & & -a_{12} \end{array}$$

$$(a_{11}a_{23} - a_{12}a_{13})x + (a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13})y + a_{14}a_{23} - a_{24}a_{13} = 0$$

$$(a_{11}a_{23} - a_{12}a_{13})x + (a_{13}a_{23} - a_{33}a_{12})z + a_{14}a_{23} - a_{34}a_{12} = 0$$

$$a_{13}y - a_{13}a_{24} = a_{12}z - a_{12}a_{34} \quad | \quad a_{13}x - a_{23}a_{14}$$

Osi glówna = indziej polski kierunek wynosi 1 do składowych indziej

$$\frac{x}{l} = \frac{y}{m} = \frac{z}{n} \quad (\text{kierunek } \vec{p} \text{ } \vec{p} \text{ } \vec{p})$$

indziej:

$$(a_{11}l + a_{12}m + a_{13}n)x + (a_{12}l + a_{22}m + a_{23}n)y + (a_{13}l + a_{23}m + a_{33}n)z + a_{14}l + a_{24}m + a_{34}n = 0$$

Jako to ma być 1 do tamtych wartości to

$$A \vec{e} + B \vec{m} \quad \frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n} = 1$$

$$(a_{11}-1)l + a_{12}m + a_{13}n = 0$$

$$a_{12}l + (a_{22}-1)m + a_{23}n = 0$$

$$a_{13}l + a_{23}m + (a_{33}-1)n = 0$$

$$A = \begin{vmatrix} a_{11}-1 & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22}-1 & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33}-1 \end{vmatrix} = 0$$

3 równości = 3 współczynniki

$$a_1 x^2 + \dots = 0$$

Ny. getting down who's in

just predestined to no other sphere to participate in the universe.

$\frac{A}{\sqrt{1-x^2}}$

$$x = l_1 x' + l_2 y' + l_3 z'$$

42

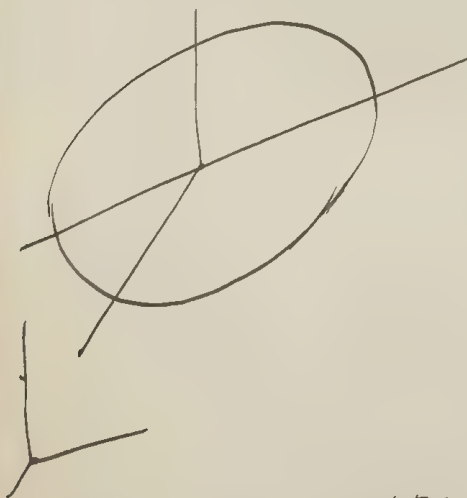
22

$$(a_{11} l_1^2 + a_{12} l_2^2 + a_{33} l_3^2 + 2a_{21} l_2 l_1 + 2a_{31} l_3 l_1 + 2a_{12} l_1 l_2) x^2 +$$

$$()_4^{12} + 2^{12}() + \dots + 2(a_{14} l_1 + a_{24} m_1 + a_{34} n_1)k + 2()_4 + L_3 - 2 = 0$$

Podobne rozwiązanie musi mieć

To jini k tujo cryptone in



done 9 7

da 2 die cartoni

$$\xi^2 + 2m\xi = \cancel{(\xi^2 + 2m\xi)} n$$

$$\xi = -m \pm \sqrt{\quad}$$

indek $\frac{f_1 + f_2}{2} = -m$

nuori hyi ~~and~~ tykko # stely

missing 9 7 5

wył. specyjalnie v. wstędn. 1



Węz z odami punktu. punkt.
zamiennie w 3 produkty

$$a_{11} = 0$$

= 0 3 kolumnki mialy

a to jest nie ma tej samej struktury co 3 wiez 1 poziom

zatem symetryczni $L_{11} = L_1$

$$L_{12} = m_1$$

$$L_{13} = n_1 \quad \text{itd.}$$

$$s_1 x'^2 + s_2 y'^2 + s_3 z'^2 + 2h_1 x' + 2h_2 y' + 2h_3 z' + k = 0$$

A przesunęliśmy początek układu współrzędnych:

$$x' = \alpha + x \quad y' = \beta + y \quad z' = \gamma + z$$

$$s_1 (\alpha + x)^2 + s_2 (\beta + y)^2 + s_3 (\gamma + z)^2 + 2(h_1 + s_1 \alpha)x + 2(h_2 + s_2 \beta)y + 2(h_3 + s_3 \gamma)z + k = 0$$

I. Jaki 3 punktów w tym układzie

$$\alpha = -\frac{h_1}{s_1} \quad \beta = -\frac{h_2}{s_2} \quad \gamma = -\frac{h_3}{s_3}$$

$$s_1 x'^2 + s_2 y'^2 + s_3 z'^2 + k = 0$$

Porównajmy do układu = ins de

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} + \frac{z'^2}{c^2} = 1$$

$$\text{gdzie jednak } k = k_{44} - (s_1 \alpha^2 + s_2 \beta^2 + s_3 \gamma^2) = 0$$

to mamy właśnie:

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} + \frac{z'^2}{c^2} = -1$$

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} + \frac{z'^2}{c^2} = 0$$

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} - \frac{z'^2}{c^2} = 1$$

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} - \frac{z'^2}{c^2} = 0$$

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} - \frac{z'^2}{c^2} = -1$$

II. žički židen 2 pinwarstun' $s=0$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & -s \\ & \end{vmatrix} \quad \text{wye} \quad \begin{vmatrix} a_{11} \\ & a_{33} \end{vmatrix} = 0$$

sis delu 2 nichkriinu w' albo)
zatu pusta hodkov

wj - stedy tyžlho $s_2, s_3 \geq 0$ zatu $\rho = -\frac{h_2}{s_2}$ $\gamma = -\frac{h_3}{s_3}$

i invarianci: $s_2 y^2 + s_3 z^2 + 2 h_1 x' + k = 0$

a). žički $h_1 \geq 0$ to $x' = x + \alpha$ toh žu $k' = 0$

wj - $s_2 y^2 + s_3 z^2 + 2 h_1 x = 0$

wj - $\left[\frac{y^2}{p} \pm \frac{z^2}{q} = 2x \right]$

alho $h_1 = 0$ stedy

$$\frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{q} = \pm 1$$

$$\frac{y^2}{p} \pm \frac{z^2}{q} = 0$$

II $s_1 = s_2 = 0$ $s_3 \geq 0$ $\gamma = -\frac{h_3}{s_3}$

$s_3 z^2 + 2 h_1 x + 2 h_2 y + k = 0$ } a puchstetage - yix

moir. to quw aduio do $z^2 = \pm 2 p x$

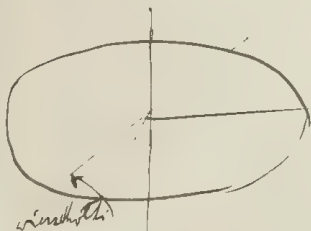
$$z^2 = \pm c^2$$

$$z^2 = 0$$

I 1). dwadzieścia kilometrów więcej $a > b > c$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{elipsoida}$$

Przekroje 2 ośmi symetryczne = elipsy (przekroje płaszczyzny)



Fokusa tej elipsy przez środek równoległe do mł.

$$\text{np. } \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \left(1 - \frac{x_0^2}{a^2}\right) \quad \text{ma ośi } b \sqrt{1 - \frac{x_0^2}{a^2}} \quad c \sqrt{1 - \frac{x_0^2}{a^2}}$$

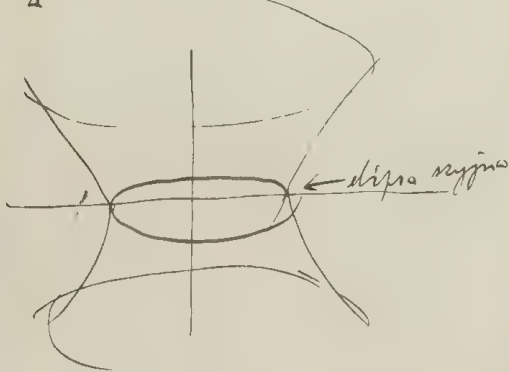
$$\frac{1}{a^2} = \frac{\cos^2 \alpha}{a^2} + \frac{\sin^2 \alpha}{b^2} + \frac{\sin^2 \alpha}{c^2} \quad \text{osi = osi symetrycznej}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{elipsa dwustronna (przekrój przez płaszczyznę } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{)} \\ \text{które nie x}$$

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{elipsoida}$$

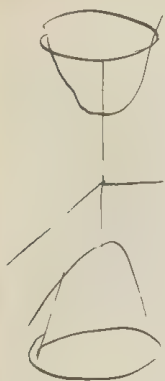
$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \quad \text{kula}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{hiperboloide jednowąstkowa}$$



$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{hiperb. jednow. dwustronna}$$

3). $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$ hip. dwubotkowa



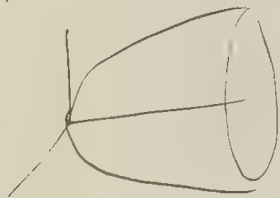
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = (\frac{z^2}{c^2} - 1)$ dla z takich $z > c$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -(\frac{z^2}{c^2} - 1)$ obrótowa

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = \pm 1$ hip. jednosieczna, mogą też pełnić rolę asymptot.

4) bez modko

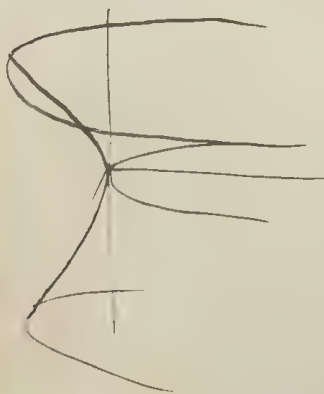
1). $\frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{q} = 2x$ Paraboloida elipsyjna



jeżeli $p=q$ obrótowa

2). $\frac{y^2}{p} - \frac{z^2}{q} = 2x$ Paraboloida hiperboliczna

Ośkoj 2 oraz $YZ = 2$ proste



$\frac{y^2}{p} - \frac{z^2}{q} = 0$ proste asymptotyczne

$= (\frac{y}{\sqrt{p}} + \frac{z}{\sqrt{q}}) (\frac{y}{\sqrt{p}} - \frac{z}{\sqrt{q}})$

$= 2$ prostych przez oś X

i przez proste ośkoj YZ przecina płaszczyznę

zadanie Sprzedane najprościej wyrażenie

63

Kula $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$

wzł. $a_{11} = a_{22} = a_{33} \quad a_{23} = a_{13} = a_{12} = 0$

$x^2 + y^2 + z^2 + 2Ax + 2By + 2Cz + D = 0$

$(x+A)^2 + \dots = A^2 + D + C^2 - D$

$a = -A, \quad b = -B, \quad c = -C, \quad r = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2 - D}$

Stożek Złożony stożek z pewną linią * przez pewny punkt
stosy: przekrojowa linia stożka.

Wierchoł

Wierchoł

$\frac{x-a}{l} = \frac{y-b}{m} = \frac{z-c}{n}$

$\Phi(x, y, z) = 0 \quad \Phi(x, y, z) = 0 \quad \left. \vphantom{\begin{matrix} \Phi(x, y, z) = 0 \\ \Phi(x, y, z) = 0 \end{matrix}} \right\} \text{linia stożka}$

$\Phi\left[x, b + \frac{m}{l}(x-a), c + \frac{n}{l}(x-a)\right] = 0 \quad \Phi[\dots] = 0$

2 top wyrażenie $x = \Psi\left(\frac{m}{l}, \frac{n}{l}\right) = 0$

wzł. $\Psi\left(\frac{y-b}{x-a}, \frac{z-c}{x-a}\right) = 0 \quad \in \mathbb{R}^2$

Mp. Wzł. - jednocześnie wyrażenie $x-a, y-b, z-c$

Drugie wyrażenie

$A_1(x-a)^2 + A_2(y-b)^2 + A_3(z-c)^2 + 2B_1(y-b)(z-c) + 2B_2(z-c)(x-a) + 2B_3(x-a)(y-b) = 0$

$a_{11} = A_1, \quad a_{22} = A_2, \quad a_{33} = A_3, \quad a_{13} = B_1, \quad a_{31} = B_1, \quad a_{12} = B_3$

$a_{14} = -(A_1 a + B_3 b + B_1 c); \quad a_{24} = -(B_3 a + A_2 b + B_1 c); \quad a_{34} = -(B_1 a + B_3 b + A_3 c)$

$a_{44} = A_1 a^2 + A_2 b^2 + A_3 c^2 + 2B_1 bc + 2B_2 ca + 2B_3 ab$

$$1.) : a_{11}a + a_{12}b + a_{13}c + a_{14} = 0$$

$$a_{21}a + a_{22}b + a_{23}c + a_{24} = 0$$

$$a_{31}a + \dots = 0$$

$$a_{41}a + \dots = 0$$

$$\begin{array}{l} \text{Zatem} \\ \text{tylko możliwe} \\ \text{żuki:} \end{array} \left| \begin{array}{c} a_{11} \\ \vdots \\ a_{41} \end{array} \right| = 0$$

2. tego pkt

$$\frac{a}{A_{14}} = \frac{b}{A_{24}} = \frac{c}{A_{34}} = \frac{1}{A_{44}}$$

2. czy otrzymujemy trojka a, b, c

Wskazujemy = pow. uko. pr. punktu równoległego do danej osi i punktu przecięcia

danej osi i punktu ~~(przecięcia z osi)~~

W

$$\frac{x}{l} = \frac{y-b}{m} = \frac{z-c}{n}$$

gdzie l, m, n = punkty
b.c. punkt przecięcia z osi. V2

$$\underbrace{F(x, y, z) = 0 \quad \Phi(x, y, z) = 0}$$

$$\text{wynikamy: } \Psi(b, c) = 0$$

$$= \Psi\left(\frac{ly - mx}{l}, \frac{lz - nx}{l}\right) = 0$$

Żukli II do X, albo Y, albo Z to przecięcia = ślad (długość, kąt, punkt)

Najogólniejszy wzór II:

$$A(lx - mx)^2 + D(lz - nx)^2 + 2C(lx - mx)(lz - nx) + D l (ly - mx) + 2 E l (lz - nx) + F l^2 = 0$$

wzgl

$$a_{22} = A l^2$$

$$a_{33} = D l^2$$

$$a_{23} = C l^2$$

$$a_{24} = D l^2$$

$$a_{34} = E l^2$$

$$a_{44} = F l^2$$

$$\begin{aligned} a_{11} &= A m^2 + D n^2 + 2 C m n &= a_{22} m^2 + a_{33} n^2 + 2 a_{23} m n \\ a_{12} &= -(C n l + A l m) &= a_{22} l + a_{23} m + a_{23} n \\ a_{13} &= -(D n l + C l m) &= a_{33} l + a_{23} m + a_{23} n \\ a_{14} &= -(E n l + D l m) &= a_{24} l + a_{24} m + a_{34} n \\ & &= a_{11} l + a_{12} m + a_{13} n \end{aligned}$$

Względem l, m, n z jedynymi słownikami trzeci:

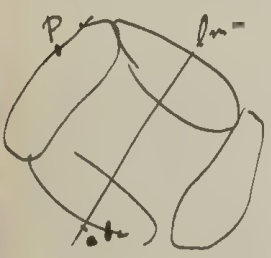
$$A_{14} = A_{24} = A_{34} = A_{44} = 0$$

względem l, m, n $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{31} & a_{34} \\ a_{41} & a_{44} \end{vmatrix} = 0$

Wtedy z dwóch równań otrzymamy l i m z n
 więc z pomocą trzeciego: $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ otrzymamy wielkości same.

Powierzchnia obrotowa = utworzona przez obrót danej krzywej wokół danej osi.

$$F(x, y, z) \quad \Phi(x, y, z) = \text{trójkąt}$$



$$\text{wtedy} \quad \overline{PM}^2 = r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 \quad \text{Kule}$$

$$lx + my + nz - p = 0 \quad \text{Płaszczyzna równoległa}$$

wprowadzamy z tych równań x, y, z :

$$\Psi(r^2, p) = 0$$

$$\Psi[(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2][lx + my + nz - p] = 0$$

II.:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 + A(x+my+nz)^2 + 2Q(x+my+nz) + C = 0$$

$$\begin{cases} 1 + Al^2 = k a_{11} \\ 1 + Am^2 = k a_{22} \\ 1 + An^2 = k a_{33} \end{cases} \quad \rho \begin{cases} Amn = k a_{12} \\ Anl = k a_{13} \\ Alm = k a_{14} \end{cases} \quad \begin{cases} Ql-a = k a_{14} \\ Qm-b = k a_{24} \\ Qn-c = k a_{34} \end{cases}$$

$$C + a^2 + b^2 + c^2 = k a_{44}$$

$$a^2 m^2 + n^2 = 1$$

z ρ :

$$Al^2 = k \frac{a_{11} a_{12}}{a_{22}}$$

$$Am^2 = k \frac{a_{12} a_{23}}{a_{33}}$$

$$An^2 = k \frac{a_{13} a_{32}}{a_{22}}$$

wz z w potęgach z x :

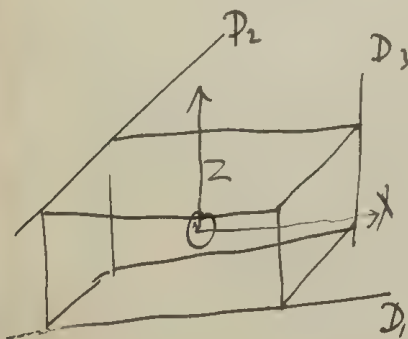
$$a_{11} - \frac{a_{12} a_{12}}{a_{22}} = a_{22} - \frac{a_{12} a_{23}}{a_{33}} = a_{33} - \frac{a_{13} a_{32}}{a_{22}} = -\frac{1}{k}$$

Wtedy z x): $A = k(a_{11} + a_{22} + a_{33}) - 3$

$$f): \frac{k a_{14} + a}{l} = \frac{k a_{24} + b}{m} = \frac{k a_{34} + c}{n}$$

Obierz dwie proste liniowe przez nich punkt ^{przez niego w punkcie} ~~nie jest~~ ~~nie jest~~
zwiększając je do 2 potęgami następującym w jednym ~~je~~

Punkty ślizgające się po 3 prostych



$$D_1 \begin{cases} y = b \\ z = -c \end{cases}$$

$$D_2 \begin{cases} z = c \\ x = -a \end{cases}$$

$$D_3 \begin{cases} x = a \\ y = -b \end{cases}$$

Pierwsze $(D_1 D_2) =$ przekształć 2 równania

65

przekształć pierwsze D_2 : $z - c = \lambda (x + a)$

$(\lambda = \frac{z-c}{x+a})$

D_3 : $y + b = \mu (x - a)$

D_1 : $y - b = k (z + c)$

$D_2 D_3$: $\mu (z - c) - \lambda (y + b) = 2\lambda \mu a$

musi być tożsamość w stałych:

$k(z + c) - (y - b) = 0 \quad | \quad \Sigma$

A. j. : ~~μ~~ $\Sigma k = \mu$
 $\Sigma = \lambda$

$\Sigma(kc + b) = -(\mu c + \lambda b + 2\lambda \mu a)$

$\mu c + \lambda b = \uparrow$

dzielić $a\lambda\mu + \lambda b + \mu c = 0$

$\lambda = \frac{z-c}{x+a} \quad \mu = \frac{y-b}{x-a}$ wtedy równanie:

$a y z + b x z + c x y + a b c = 0$ kr. I.

itd.

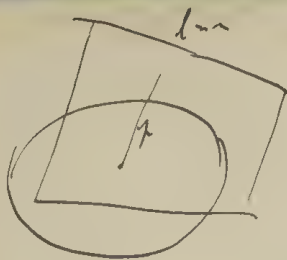
Ogólna forma II-ego równania:

$a x^2 + b y^2 + c z^2 = 1$

1. trygonometryczne: $a x^2 + b y^2 + c z^2 = 1$

2. redukcyjne: $a x^2 + b y^2 + c z^2 = 0$

} $(0, 1, 1 + a_1 z + a_2 z^2) \dots$
 z tego wynika



$$ax + by + cz = 1$$

we find normal

$$\frac{1}{\sqrt{a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2}}$$

$$\text{then } p = \frac{1}{\sqrt{a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2}} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \quad n = \frac{ax}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$\text{we find } \frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} + \frac{n^2}{c^2} = 1$$

$$p = lx + my + nz = \left(\frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} + \frac{n^2}{c^2} \right) \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$p^2 = \frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} + \frac{n^2}{c^2}$$

$$p^{1/2} = \frac{l^{1/2}}{a} + \frac{m^{1/2}}{b} + \frac{n^{1/2}}{c}$$

$$\frac{p^{1/2}}{\sum_3 p^{1/2}} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

$\sum (\text{normal})^2$ is 3 parts. $p^{1/2} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$

$$a[(y+2)^2 - (y-2)^2] + b[(x+2)^2 - (x-2)^2] + c[(x+y)^2 - (x-y)^2] + dx$$

66

$$x-2 = x+y-y+2$$

$$\begin{vmatrix} 0 & -s & c & 0 & 0 \\ c & 0 & -s & a & 0 \\ a & 0 & 0 & -s & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -s \end{vmatrix} = 0$$

$$-s^3 + 2abc + s(b^2 + a^2 + c^2) = 0$$

1-

$$\cancel{v-u} = x-y$$

$$w-v = y-2$$

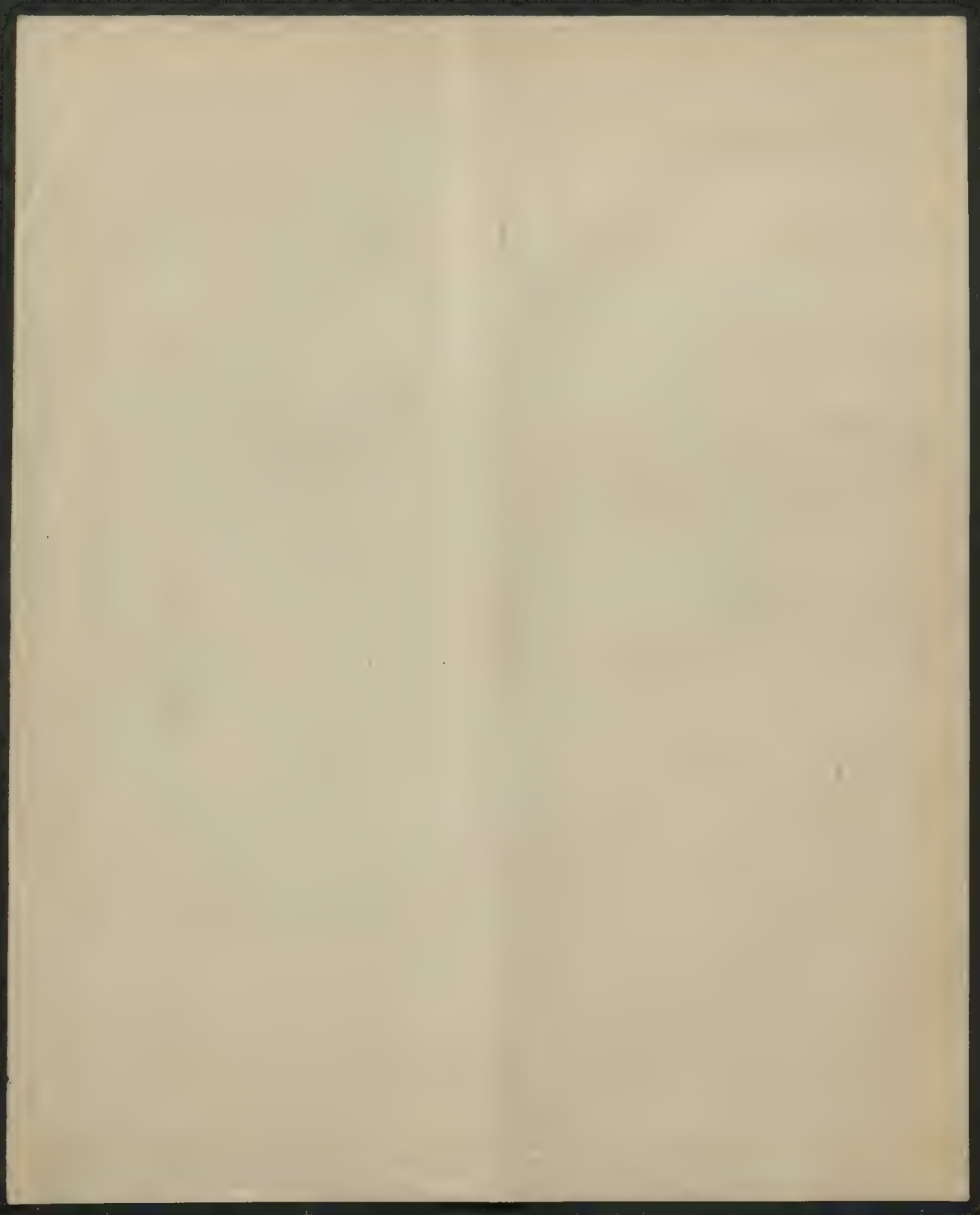
$$u-w = 2-x$$

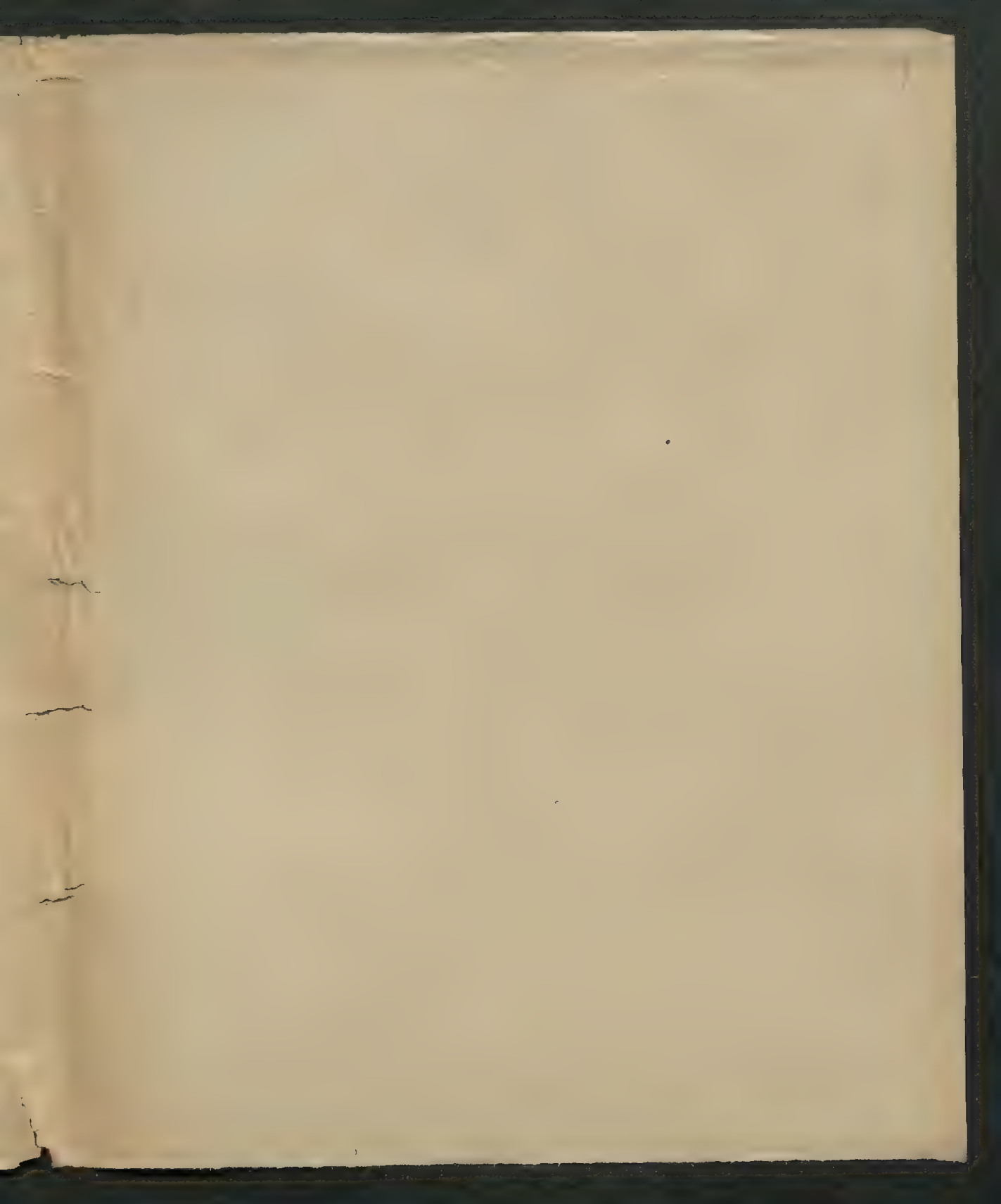
$$a[u^2 - (w-v)^2] + b[v^2 - (u-w)^2] + c[w^2 - (u-v)^2] + dx$$

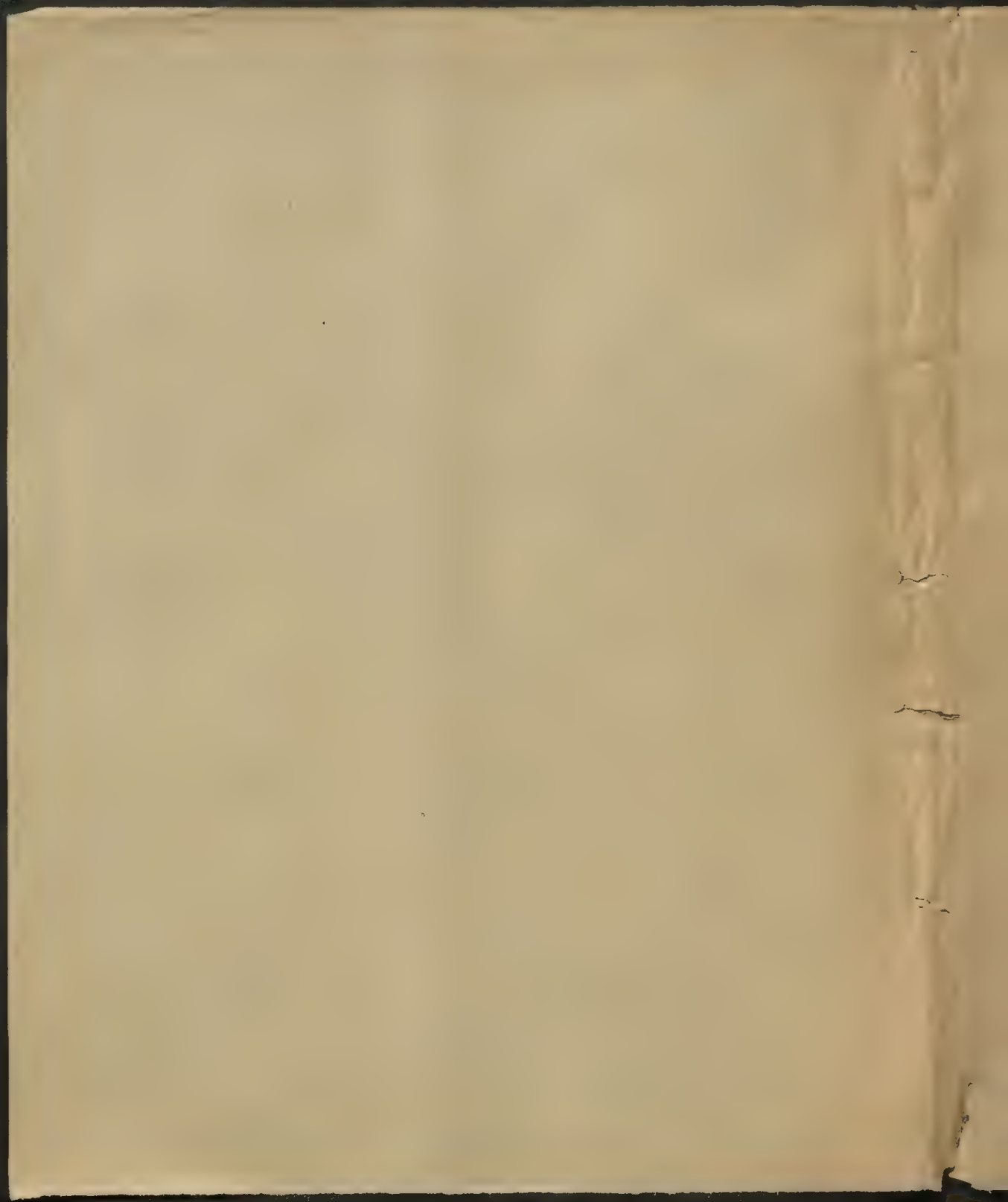
$$a(u^2 - w^2 - v^2 + 2vw) + b(v^2 - u^2 + w^2 - 2uw) + c(w^2 - u^2 - v^2 + 2uv) + dx$$

$$(x-y)(x+y)(x-y)$$

$$(x-y)(x+y)(x-y)$$



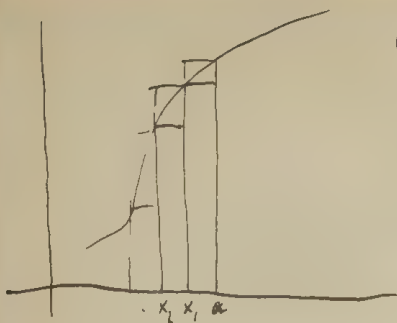




Easton and Smith

Smith's property

1st 1911



$$F > (a-x_1)f(x_1) + (x_1-x_2)f(x_2) + \dots + (x_{n-1}-x_n)f(x_n) + \dots$$

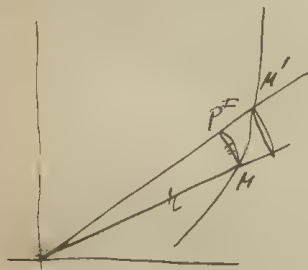
$$f(x_{n+1}) - f(x_n) < \varepsilon$$

$$(a-x_1)\varepsilon + \dots$$

$$\text{r  zmi  } < \varepsilon(a-b) \text{ z t  } \lim = 0$$

$$F = \lim \Sigma \dots = \int_a^b dx \cdot f(x)$$

$$dF = y dx$$



$$r = f(\varphi)$$

$$\frac{1}{2} r^2 d\varphi < dF < \frac{(r+dr)^2}{2} d\varphi$$

$$\frac{r^2}{2} < \frac{dF}{d\varphi} < \frac{1}{2} r^2 + dr + \frac{dr^2}{2}$$

$$dF = \frac{1}{2} r^2 d\varphi$$

$$F = \frac{1}{2} r^2 d\varphi$$

$$\tan \varphi = \frac{y}{x}$$

$$\frac{dy}{\cos^2 \varphi} = \frac{x dy - y dx}{x^2}$$

$$d\varphi \cdot \frac{x^2}{\cos^2 \varphi} = r^2 d\varphi = x dy - y dx$$

$$dF = \frac{1}{2} (x dy - y dx)$$

$$\lim_{\Delta s} \frac{\Delta s}{MM'} = 1$$

$$MM' = \sqrt{PM^2 + PM'^2} = \sqrt{\left[r \Delta\varphi \cdot \frac{2 \tan \frac{\Delta\varphi}{2}}{\Delta\varphi} \right]^2 + \Delta r^2}$$

~~lim~~

$$\lim_{\Delta s} \frac{MM'}{\Delta s} = \lim_{\Delta s} \sqrt{\left(\frac{\Delta r}{\Delta s} \right)^2 + \left[r \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} \cdot \frac{2 \tan \frac{\Delta\varphi}{2}}{\Delta\varphi} \right]^2}$$

$$1 = \sqrt{\left(\frac{dr}{ds} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{ds} \right)^2}$$

$$ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\varphi^2}$$

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

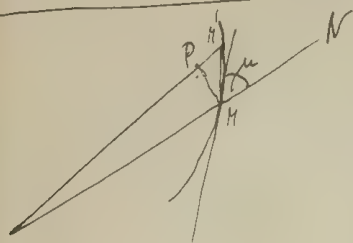
$$x = r \cos \varphi$$

$$y = r \sin \varphi$$

$$dx = dr \cos \varphi - r \sin \varphi d\varphi$$

$$dy = dr \sin \varphi + r \cos \varphi d\varphi$$

$$ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\varphi^2}$$

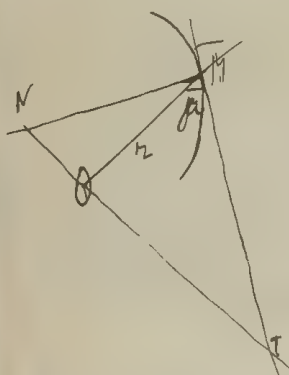


$$\mu = \angle M' M N$$

$$\cos \mu = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \cos(\angle P M M') = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta s} = \frac{dr}{\sqrt{dr^2 + r^2 d\varphi^2}}$$

$$\sin \mu = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{r d\varphi}{\Delta s} = \frac{r d\varphi}{\sqrt{dr^2 + r^2 d\varphi^2}}$$

$$\tan \mu = \frac{r d\varphi}{dr} = \frac{r}{r'}$$



$$\tan \mu = \frac{OT}{PT} = r \tan \mu = \frac{r^2}{r'}$$

$$\frac{OT}{PT} = \frac{r}{r'} = r'$$

$$T = \sqrt{r'^2 + r^2} = r \frac{ds}{dr}$$

$$N = \sqrt{r'^2 + r^2} = \frac{ds}{d\varphi}$$

$$\varphi = \mu + \varphi$$

$$R = \frac{ds}{d\varphi}$$

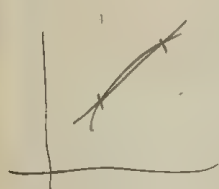
$$d\varphi = d\mu + d\varphi$$

$$\frac{d\mu}{\tan \mu} = \frac{r'^2 - r r''}{r'^2} d\varphi$$

$$\frac{d\mu}{d\varphi} = \frac{r'^2 - r r''}{r'^2} \frac{1}{1 + \frac{r^2}{r'^2}} = \frac{r'^2 - r r''}{r'^2 + r^2}$$

$$R = \frac{ds}{d\varphi} \cdot \frac{1}{\frac{d\mu}{d\varphi} + 1} = \frac{\sqrt{r'^2 + r^2}}{1 + \frac{r'^2 - r r''}{r'^2 + r^2}} = \frac{(r'^2 + r^2)^{3/2}}{r'^2 + 2r r'' - r^2 r''}$$

Styczna = prosta przechodząca przez 2 punkty bliższe punkty



$$y - y_0 = \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \right) (x - x_0)$$

$$y = f(x)$$

$$y - y_0 = \frac{dy}{dx} (x - x_0)$$

naturalnie wtedy kiedy jeżeli wyznaczymy limit $\frac{\Delta y}{\Delta x}$
t.j. jeżeli funkcję f mamy być różniczkowalną

$$= f'(x_0) (x - x_0)$$

Jeżeli $x = \varphi(t)$ $y = \psi(t)$

$$dy = \psi'(t) dt \quad dx = \varphi'(t) dt$$

$$y - y_0 = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} (x - x_0)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{wówczas} \\ \text{wtedy} \end{array} \right\} \begin{array}{l} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \end{array} \right.$$

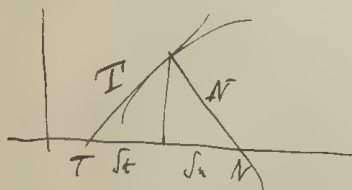
$$f(x, y) = 0$$

Albo $x = \varphi(t)$ albo odwrotnie

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$$

$$(x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x} + (y - y_0) \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$



Subnormal

$$S_n = y \frac{dy}{dx}$$

$$N = \sqrt{y^2 + \left(y \frac{dy}{dx} \right)^2} = y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2}$$

Subtangent

$$S_t = y \frac{dx}{dy}$$

$$T = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy} \right)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy} \right)^2}$$

Asymptota (przy dużych wartościach x do nieskończoności) = prosta której odległość od punktu krzywej $\rightarrow \lim 0$

$$y = f(x)$$

$$y = g x + h$$

$$\text{odległość} = \frac{y - g x - h}{\sqrt{1 + g^2}}$$

$$\lim \left\{ \frac{y - g x - h}{\sqrt{1 + g^2}} \right\} = 0$$

$$\text{wtedy } y - g x - h = 0$$

$$\frac{y}{x} = g + \frac{h+x}{x}$$

~~$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = g$$~~
$$h = \lim (y - gx)$$

$$g = \lim \frac{y}{x} \quad \text{tato rovnici jiz} \quad y = g \lim \frac{y}{x} + \lim (y - x \lim \frac{y}{x})$$

Tricidmny je ~~tato~~ stejne, pokud $x \rightarrow \infty$ jiz vyzije istina, jiz identity
 z asymptoty $y = g \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{dy}{dx} \right) + \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{dy}{dx} - y - x \left(\frac{dy}{dx} \right) \right]$

$$\text{Opovrat: } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{dy}{dx}}{1} = \text{stejne}$$

jako vyjádření vztahů

$$\lim (y - gx) = \lim \frac{\frac{y}{x} - g}{\frac{1}{x}} = \frac{0}{0} = \frac{x \frac{dy}{dx} - y}{\frac{1}{x}} = \lim (x \frac{dy}{dx} - y)$$

vsle fakticky tato rovnice stej identity a tu v rasi jiz

istinyje te vstavi prave.

N. p.

~~$$y = ax e^{-x} + b$$~~

~~$$\frac{dy}{dx} = a e^{-x} - ax e^{-x}$$~~

~~$$\lim \frac{dy}{dx} = a = g$$~~

~~$$y = x \frac{dy}{dx} \text{ for } y = ax e^{-x} = \lim a x e^{-x}$$~~

$$\frac{x^2}{a} = y \frac{x^2}{b} = 1$$

$$\frac{y}{x} = \frac{1}{a}$$

$$h = \lim (y - \frac{1}{a} x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b^2}{a^2 y}$$

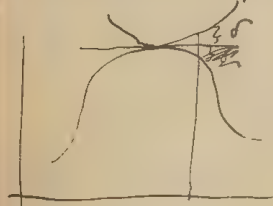
$$= \lim (y - x \frac{dy}{dx}) = \lim (y - \frac{b^2 x^2}{a^2 y}) = \lim \frac{a^2 y^2 - b^2 x^2}{a^2 y} = \frac{0}{0}$$



Maksima Minima.

71

testujemy uogólnienie sprzeczności, wstawiamy sprzeczny przypadek i sprawdzamy
 jeżeli musi być prawdziwe o naszym założeniu.



$$f(x_0 + h) < f(x_0) \quad h \geq 0$$

$$\begin{aligned} \delta &= f(x_0 + h) - f(x_0) = h f'(x_0 + \theta h) < 0 \\ &= h f'(x_0) + R_2 < 0 \end{aligned}$$

toż samo dla minimum

to jednakże zmniejsza się h ~~do 0~~

zatem $f'(x_0) = 0$ wtedy $\delta = h^2 \frac{f''(x_0)}{2} + R_3$

jeżeli $f''(x_0) > 0$ to ~~toż samo~~ ^{max} min.

Gdyż jeżeli $f''(x_0) = 0$ $f'''(x_0) > 0$ to punkt przegięcia

zatem max min jeżeli w tym punkcie otrzymamy $u''(y) = 0$ $n = n_{przegląd}$

a $(n+1) > 0$; a ~~zatem~~ ^{min} ~~jeżeli~~ ^{max}

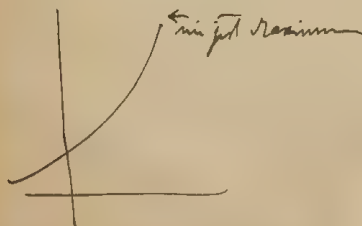
jeżeli $f(x, y) = 0$ to $\frac{dy}{dx} = - \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} = 0$ ale $\frac{d^2 y}{dx^2} > 0$ to

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \frac{d^2 y}{dx^2} = 0$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = - \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2}{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}$$

$$= - \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2}{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}} \quad \text{max min}$$



$$y = x^m + a x^{m-1} + b x^{m-2} + \dots$$

$$y' = m x^{m-1} + a (m-1) x^{m-2} + b (m-2) x^{m-3} + \dots$$

$$y = x^m (a-x)^n \quad y' = x^{m-1} (a-x)^{n-1} [m a - (m+n)x] = 0$$

$$y'' =$$

$$x = \frac{a m}{m+n}$$

Maximum

$$x = a$$

(Min. ~~at~~ $n=0$)

$$x=0$$

(Min. $n=0$)

$$y = x^x$$

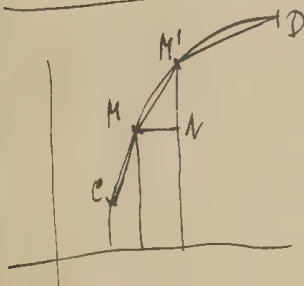
$$y' = x^{x+1} [L(x) + 1] = 0$$

$$L(x) = -1$$

$$x = \frac{1}{e}$$

$$y'' = x^x \left\{ [L(x) + 1]^2 + \frac{1}{x} \right\}$$

$$y'' = y \cdot e > 0 \text{ Minimum}$$



$$MM' = \sqrt{MN^2 + M'N^2} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \Delta x \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}$$

$$= \Delta x \sqrt{1 + f'(x + \theta \Delta x)^2} = \Delta x \sqrt{1 + f'(x)^2 + \epsilon}$$

$$s = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum \Delta x \sqrt{1 + f'(x)^2}$$

$$= \int dx \sqrt{1 + f'(x)^2}$$

jeżeli funkcja jest ciągła i jeżeli
jeżeli lin. przystąpi

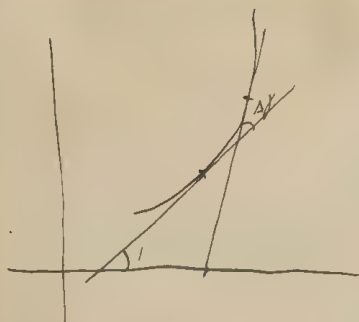
$$\Delta s = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

$$\frac{MM'}{\Delta s} = \frac{\Delta x \sqrt{1 + f'(x)^2}}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}$$

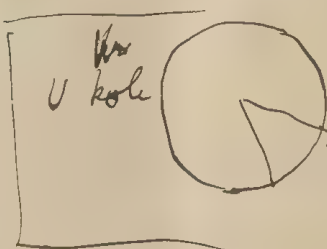
$$\lim : = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{\frac{ds}{dx}} = 1$$

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

$$\frac{dx}{ds} = \cos \varphi \quad \frac{dy}{ds} = \sin \varphi$$



precizna
~~precizna~~ warty' krzywizny = $\frac{dy}{ds}$



$$s = \alpha R$$

$$\text{krzywizna} = \frac{\varphi}{s} = \frac{1}{R}$$

Promień krzywizny $\frac{1}{R} = \frac{dy}{ds}$

$$\text{tg } \varphi = \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{\cos \varphi} = \frac{dy}{dx} dx$$

$$\frac{dy}{ds} = \cos \varphi \cdot \frac{dy}{dx} \frac{dx}{ds} = \frac{\frac{dy}{dx} \frac{dx}{ds}}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} =$$

$$= \cos^3 \varphi \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}^3}$$

$$R = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}^3}{\frac{dy}{dx}} = \frac{ds^3}{dx^2}$$

Kole = jedyną krzywą o krzywiznie stałej

$$ds = R d\varphi$$

$$\frac{dx}{ds} = \frac{1}{R}$$

$$\frac{dy}{ds} = \frac{1}{R}$$

$$dx = ds \cos \varphi = R \cos \varphi d\varphi$$

$$dy = R \sin \varphi d\varphi$$

$$= -R d(\sin \varphi)$$

$$= R d(\cos \varphi)$$

$$x - x_0 = -R \sin \varphi$$

$$y - y_0 = R \cos \varphi$$

$$\left. \begin{array}{l} x - x_0 = -R \sin \varphi \\ y - y_0 = R \cos \varphi \end{array} \right\} (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

Spółrzędne środka krzywizny $\xi = x - R \sin \alpha$ $\eta = y + R \cos \alpha$

Środek krzywizny = punkt przecięcia dwóch prost. stycznych normalnych

$$\xi - x + (y - y) \frac{dy}{dx} = 0$$

~~10~~ ∇

$$\xi - x - \Delta x + (y - y - \Delta y) \frac{dy}{dx} + (y - y) \left(\frac{dy}{dx} + \Delta \frac{dy}{dx} \right) = 0$$

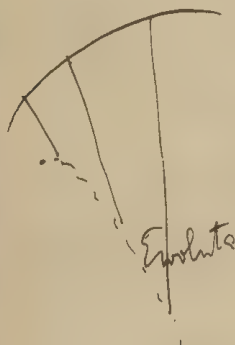
$$V(\xi, \eta, x, y) = 0 \quad V(\xi, \eta, x + \Delta x, y + \Delta y) = 0$$

$$\frac{dV}{dx} = -1 - \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + (y - y) \frac{d^2 y}{dx^2} = 0$$

$$y - y = \frac{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2}{\frac{d^2 y}{dx^2}} = \frac{R}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2}} = R \sin \varphi$$

$$\xi - x = - \frac{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right)^{-1/2}}{\frac{d^2 y}{dx^2}} \cdot \frac{dy}{dx} = -R \cos \varphi$$

$$(y - y)^2 + (\xi - x)^2 = R^2$$



$$\xi = x + R \cos \varphi$$

$$\eta = y + R \sin \varphi$$

$$d\xi = dx - R \sin \varphi d\varphi = dR \cos \varphi$$

$$d\eta = dy + R \cos \varphi d\varphi + dR \sin \varphi$$

$$\Rightarrow \text{so } R = \frac{ds}{d\varphi}$$

$$d\xi = -dR \sin \varphi$$

$$d\eta = +dR \cos \varphi$$

$$\underbrace{d\xi^2 + d\eta^2}_{ds^2} = (dR)^2$$

$$\frac{dy}{d\xi} = -\cot \varphi$$

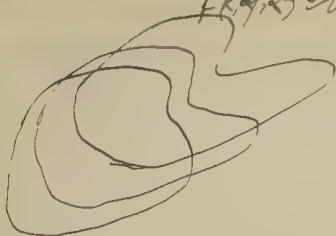
$\eta - y$ Normované krzywizny = stygowa cięciwa

$$\rho^2 = R - R, \quad \text{Jżeli nie ma mowy o ewolucie ...}$$

$$\text{Cardoidy } y^2 = 4ax \quad \left| \begin{array}{l} \xi = 3x + \frac{y^2}{4a} \\ \eta = -\frac{y^3}{12a} \end{array} \right.$$

$$\eta^2 = \frac{y^6}{144} = \frac{(\xi - x)^3}{27}$$

$f(x, y, z) = 0$ - jednowartościowa!



funkcja przegięta

$$\left. \begin{aligned} f(x, y, \alpha) &= 0 \\ f(x, y, \alpha + d\alpha) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

$\frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0$ jeżeli z typ, wówczas z z prawej strony jest α

to to będzie odpowiednie styczne w punkcie występu punktem przegięcia = obwód

One jest styczna do okręgu krzywych w punktach wspólnych

bo x-doi wgi : $f(x, y, \alpha) = 0 \quad \frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0$

a kłomach stycznej o pewnym punkcie krzywych systemu : $\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = 0$

obwód : tam α jest już wyrażone przez $\frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0$

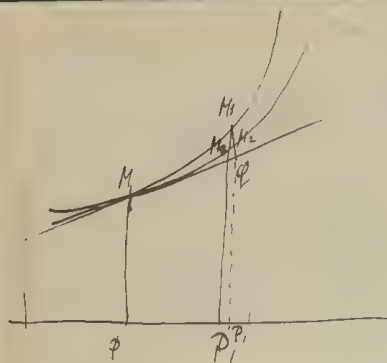
zatem : $\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial \alpha} d\alpha = 0$
 \Rightarrow zata odległość

St. p. Envelope = obwód systemu normalnych

$y - y = (y - x) \frac{dx}{dy}$

$\frac{\partial}{\partial x} : \frac{dy}{dx} = \dots \dots \dots$ etc.

Końca krzywa = obwód jej stycznych



Jako v punkcie P_1 obie krzywe mogą być same styczne do krzywej
 i one są dotykającymi...

To dotykaniem można być przez więcej niż jedno miejsce

Jednak wówczas $\frac{M_1 M_2}{PQ} = \text{wsk. modyfikacji}$

możemy się rachować stycznie względem

$$\text{Jako utwórzenie} \quad \frac{M_1 M_2}{PQ} = \frac{M_1 M_3}{PP_1} = \frac{M_1 M_2}{\text{wsk.}} = \frac{M_1 M_2}{PQ} \cdot \frac{1}{\text{wsk.}}$$

to będzie zatem wielkość tego samego rodzaju jak poprzednio (jako mi przypadała $y = \frac{P_1}{P}$)

zatem takie równanie mamy, przy czym stajemy do obliczenia

$$y_1 = y + \frac{dy}{dx} \Delta x + \frac{d^2 y}{dx^2} \Delta x^2 + \dots$$

$$y'_1 = y' + \frac{dy'}{dx} \Delta x + \dots$$

$$\Delta y = (y - y'_1) + \left(\frac{dy}{dx} - \frac{dy'_1}{dx} \right) \Delta x + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{d^2 y'_1}{dx^2} \right) \Delta x^2 + \dots$$

$$+ \frac{1}{(n+1)!} \left(\frac{d^{n+1} y}{dx^{n+1}} - \frac{d^{n+1} y'_1}{dx^{n+1}} \right) \Delta x^{n+1} + \dots$$

Widzimy, że w tym stycznie względem to musi być

$$y = y'_1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy'_1}{dx}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d^2 y'_1}{dx^2}$$

Zamiast powiedzieć że

Krzywa ma punkt styczności z krzywą μ można także powiedzieć

że przecinają się w $\mu+1$ punktach nieskończenie blisko

$$\text{tj. } f(x) - F(x) = \varphi(x)$$

$$\varphi(x) = 0 \quad \varphi(x+h_1) = 0 \quad \varphi(x+h_2) = 0 \quad \dots \quad \varphi(x+h_n) = 0$$

$$-\varphi(x)$$

$$\varphi'(x+h_1) = 0$$

$$\varphi(x)$$

$$\varphi'(x+h_2) = 0$$

$$\varphi'(x+h_n) = 0$$

$$\varphi'(x+h_1) = 0$$

$$\varphi'(x+h_1) = 0$$

$$\varphi''(x+h_1) = 0$$

lim:

$$\text{tj. } \varphi(x) = 0$$

$$f(x) = F(x)$$

$$\varphi'(x) = 0$$

$$\varphi''(x) = 0$$

$$\frac{d^2 \varphi}{dx^2} = \frac{d^2 F}{dx^2}$$

Jżeli równanie f dane, a φ funkcja F jest n-stajęch dwojgach to
można je tak oszacować że będącym moli w punkcie dwojgach styczności wynosi $(n-1)$

w przeciwieństwie 2-stajęch zotem. ~~$\varphi' = a + b$~~

$$y = a\xi + b$$

$$y = y \quad \frac{dy}{d\xi} = \frac{dy}{dx} \quad a = \frac{dy}{dx} \quad | \quad b = y - x \frac{dy}{dx}$$

$$y - y = \frac{dy}{dx} (\xi - x)$$

Wzłone krzywe II mają 5-stajęch zotem styczności wynosi 5

$$\text{tj. } y = y'$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy'}{dx'}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy'}{dx'}$$

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$$

$$(x-a) + (y-b) \frac{dy'}{dx} = 0$$

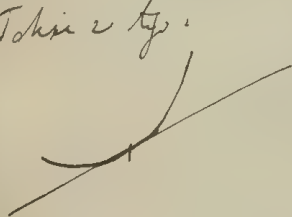
$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + (y-b) \frac{dy'}{dx} = 0$$

Kręgi krzywe styczności wynosi 5
ponieważ 3-stajęch zotem styczności wynosi 3
względem punktu przecięcia krzywej, tj. 3
względem punktu styczności zotem styczności wynosi 3
jedną stronę (tam styczności 3-stajęch zotem)

wzrost	$\frac{dy}{dx} < 0$	conca	} jeśli $y > 0$
wypukłość	$\frac{d^2y}{dx^2} > 0$	wzrost	
wzrost	$\frac{dy}{dx} > 0$		$y < 0$
wypukłość	$\frac{d^2y}{dx^2} < 0$		

jeżeli $= 0$ to trzeba sprawdzić pochodną

Także c. tj.



$$y = y_1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)_1 \Delta x + \frac{1}{2} y'' \Delta x^2 + \dots$$

$$y = y_1 + y'_1 \Delta x$$

$$y - y_1 = y' \frac{\Delta x^2}{2} + y'' \frac{\Delta x^3}{6} + \dots$$

wzrost jeżeli $y'' > 0$ to wypukłość str.

tuż jeżeli $y'' = 0$ $y''' > 0$ to punkt przegięcia bo $y - y_1$ zmienia znak

$y''' = 0 = y^{(4)}$ $y^{(4)} > 0$ to punkt stykania (zginęła się) wyszło

$y^{(4)} = 0$ $y^{(5)} < 0$ punkt przegięcia str.

Np.

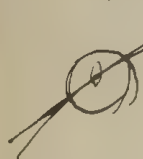
$$y = x^3 - 2x^2 + 6x + 1$$

$$y' = 3x^2 - 4x + 6$$

$$y'' = 6x - 4$$

unsty outline

KL



Tylko 2 punkty przegięcia, o. proste są same $\lim = 180^\circ$

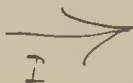
Trzeci w innych to osie

1) punkty wirtualne



$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$$

2) punkty osowe



$$y = x \pm \sqrt{x^3}$$

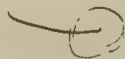
$$y' = 1 \pm \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$$

$$y = x^2 \pm \sqrt{x^5}$$

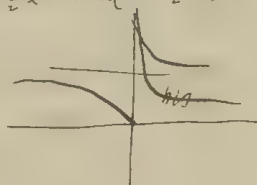
$$y' = 2x \pm \frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}} = x(\frac{2}{2} \pm \frac{5}{2}\sqrt{x})$$

3) przegięcia

4) koinwce



$$y = \frac{1}{e^x} \quad || x=0$$

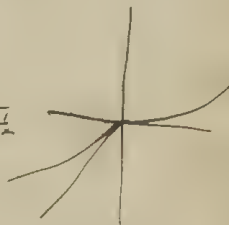


5) złamania



$$y = \frac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$$

$$\left(\frac{y}{x}\right)' = \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$$



$$(y-x)^2 = x^3$$

$$(y-x^2)^2 = x^5$$

$$2(y-x) = 0 \quad | \quad -2(y-x) - 3x^2 = 0$$

$$y=0 \quad \quad \quad x=0$$

Parabola: Kt przysięmy o punkcie $y=0$
 $x=0$

$$R = p$$

76

$$y = 2px - x^2$$

$$(x-p)^2 + y^2 = p^2$$

$$y^2 = 2px - x^2$$

$$y \frac{dy}{dx} = p - x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p-x}{y}$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y \frac{d^2y}{dx^2} = -1$$

$$3 \left(\frac{dy}{dx}\right) \frac{d^2y}{dx^2} + y \left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) = 0$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = -y^2 - (p-x)^2$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 =$$

$$= x^2 - 2px - x^2 + 2px - p^2$$

$$= -p^2$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} =$$

$$(x^2 + y^2 + \frac{p^2}{2} - a \times \sqrt{2}) (x^2 + y^2 + \frac{p^2}{2} + a \times \sqrt{2}) = \frac{p^4}{4}$$

$$(x^2 + y^2 + \frac{p^2}{2})^2 - 2a^2 x^2 = \frac{p^4}{4}$$

$$(x^2 + y^2) + \frac{p^2}{2} + (x^2 + y^2) - 2ax^2 = \frac{p^4}{4}$$

$$x = 2a \sin^2 \theta$$

Limbo

$$\frac{x}{2a} = \sin^2 \theta$$

$$y = \frac{2a}{\tan \theta} - 2a \cot \theta$$

$$\frac{y}{2a} = \frac{\tan \theta}{\tan \theta} - \cot \theta$$

$$= \frac{\tan^3 \theta}{\tan \theta}$$

$$\frac{y^2}{4a^2} = \frac{\tan^6 \theta}{\tan^2 \theta} = \frac{(1 - \frac{x}{2a})^3}{\frac{x}{2a}}$$

$$p = \frac{\sqrt{x(2a-x)^3}}{3(2a-x)^2}$$

$$xy^2 = (2a-x)^3$$



$$\xi = (x + k_2) \tan^2 \theta - x$$

$$\sin^2 \theta = \frac{x^2}{1 + y^2} = \frac{k_2^2}{1 + k_2^2} = \frac{k_2}{1 + 2k_2}$$

$$y = (x + k_2) \tan \theta$$

$$\frac{\xi}{k_2} = \frac{y}{y^2} \quad \xi = y \tan \theta \quad y = \frac{k_2}{\tan \theta}$$

$$y = x + k_2$$

$$\xi = \frac{(2x + k_2) k_2}{2} \quad k_2 - x$$

$$\xi = -x \sin^2 \theta$$

$$= x \frac{k_2^2}{1 + k_2^2} = \frac{2x k_2^2}{1 + k_2^2} = x \sin^2 \theta = \frac{k_2 x}{1 + 2k_2}$$

$$\xi k_2 + 2x \xi = k_2 x$$

$$x = \frac{\xi k_2}{1 - 2\xi}$$

$$y = x \tan \theta$$

$$y^2 = \frac{x^2 k_2}{1 + 2k_2} \left(1 - \frac{k_2}{1 + 2k_2}\right) = \frac{2x^3 k_2}{(1 + 2k_2)^2} = \frac{2x}{k_2} \xi^2 = \frac{2\xi^3}{1 - 2\xi}$$

$$y^2 (1 - 2\xi) = 2\xi^3$$

prilici tvoj točki $P_3 = 0$ to dolji do ~ 4

77

gdje mišna otvornost punkty iskorisane, alko carstva drugoga iskorisati etc. (Sant)

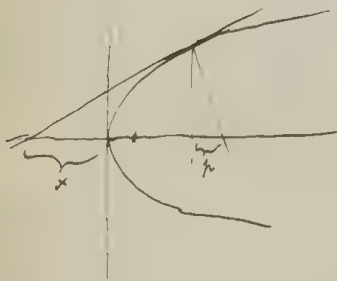
Parabole $y^2 = 2px$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{y}$$

$$y \frac{dy}{dx} = \frac{p}{2} = p$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{p}{y^3} \text{ isto vrijedi uvijek} \quad | \text{ Nema kon.}$$

$$f_x = \frac{y}{2x} = \frac{p^2}{2x} = 2x$$



$$R = -\frac{(1 + \frac{p^2}{y^2})^{3/2}}{\frac{p^2}{y^3}}$$

$$= -2x(1 + \frac{p^2}{2x})^{3/2} = -\frac{(p^2 + 2x)^{3/2}}{\sqrt{2x}}$$

$$= -\frac{(p^2 + y^2)^{3/2}}{p^2}$$

$$R_{x=0} = -p$$

$$f = \frac{x - R \sin \theta}{1 + \frac{p^2}{y^2}} = \frac{3x + p}{\sqrt{2x}}$$

$$y = -\frac{y^3}{p^2} \quad \text{odgovarajuće}$$

Vrijedi kraj 2. $y^2 = 2px + p^2x^2$

$$y \frac{dy}{dx} = p(1 + px)^2$$

$$y \frac{d^2y}{dx^2} + (\frac{dy}{dx})^2 = p \quad | y^2$$

$$y^3 \frac{d^2y}{dx^2} = -p^2$$

$$R = \frac{1 + \dots}{\dots} = \frac{[y^2(1 + (\frac{dy}{dx})^2)]^{3/2}}{p^2} = \frac{N^3}{p^2}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{bx}{ay}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{b^2}{a^2y} = -\frac{bx}{a^2y^2} \frac{bx}{ay}$$

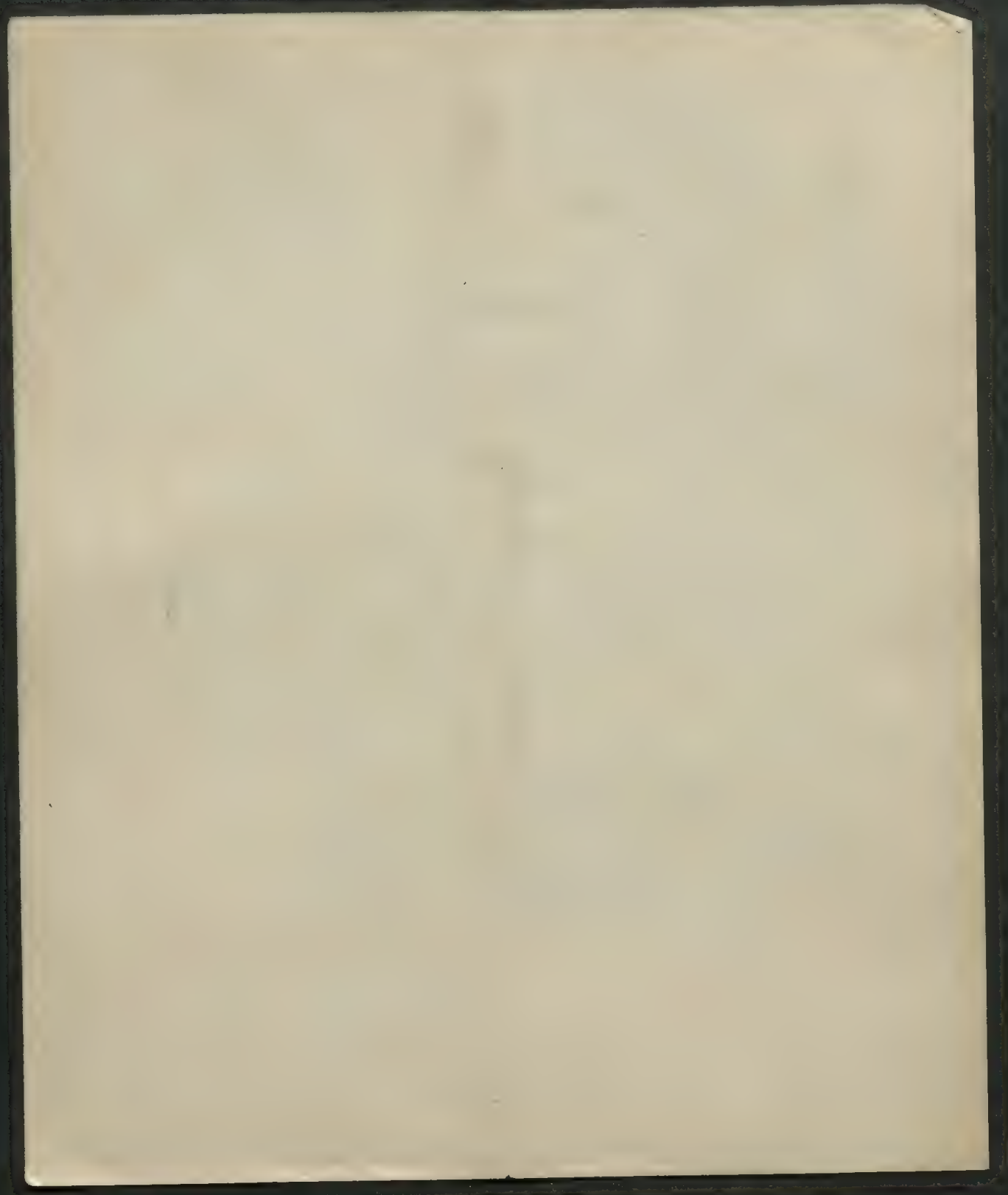
$$= -\frac{b^2}{a^2y} (1 + \frac{b^2x^2}{a^2y^2}) = -\frac{b^4}{a^2y^3}$$

$$R = -\frac{a^2y^3}{b^4} [1 + \frac{b^2x^2}{a^2y^2}]^{3/2} = -\frac{(a^2y^2 + b^2x^2)^{3/2}}{a^2b^4}$$

$$f = \frac{a^2 - b^2}{a^4} x^3 \quad y = -\frac{a^2 - b^2}{b^4} y^3$$

$$\frac{a^2 - b^2}{a^4} = \alpha \quad \frac{a^2 - b^2}{b^4} = \beta$$

$$(\frac{f}{\alpha})^{1/3} + (\frac{y}{\beta})^{1/3} = 1$$



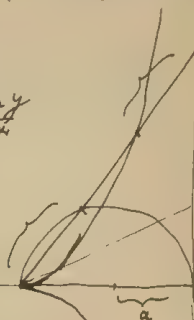
$$\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y_1}{b_1}\right)^{\frac{2}{3}} = 1 \quad \text{ell.}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} x_1 = 0 \\ y_1 = 0 \end{aligned} \quad \text{punktly zrotovej}$$

$$\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{y_1}{b_1}\right)^{\frac{2}{3}} = 1 \quad \text{Bp.}$$

$$1 \text{ Cirkulo } (2a-x)y^2 = x^3$$

$$y = \frac{4}{3} \frac{2ay}{x}$$



Lemmis koto

$$\overline{OA} = a$$

$$[A \cos 2\varphi] = \theta F$$

$$\frac{OF}{r} = \frac{r}{2} : \frac{a}{2}$$

$$r^2 = A \cdot OF = a^2 \cos 2\varphi$$

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2 (\tilde{r} \cos \tilde{\varphi} - \tilde{r} \sin \tilde{\varphi}) = a^2 (x^2 - y^2)$$

$$2(x \frac{dy}{dx} + y) \frac{(x^2 + y^2)}{r^2} = a^2 (x - y \frac{dy}{dx})$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(a^2 - 2r^2)x}{(a^2 + 2r^2)y}$$

$$\text{Mon.} \quad \left\{ \begin{aligned} 2x r^2 &= a^2 x \\ r &= \frac{a}{\sqrt{2}} \end{aligned} \right.$$

$$r = \frac{a}{\sqrt{2}} \quad \text{y } \theta = \frac{\pi}{6}$$

$$\frac{dy}{dx} = \dots$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad \left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 4x r^2 - 2a^2 x = 2x(2r^2 - a^2) \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 4y r^2 + 2a^2 y = 2y(2r^2 + a^2) \end{aligned} \right\} x, y = 0 \quad \text{punktly zrotovej}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 4y r^2 + 2a^2 y = 2y(2r^2 + a^2)$$

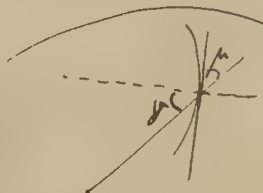
$$r = a \cos 2\theta$$

$$r = a \cos 2\theta$$

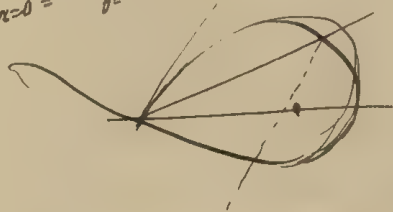
$$r' = -\frac{a \sin 2\theta}{\cos 2\theta}$$

$$\frac{r'}{r} = -\frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta} = -\tan 2\theta$$

$$r = 2\theta$$



$$\text{wky. } \theta \text{ alla linia } r=0 = \text{w } 2\theta = 0 \quad \theta = 45^\circ$$



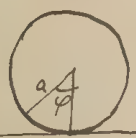
$$\left(\frac{x}{a_1}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b_1}\right)^{\frac{2}{3}} = 1 \quad a_1 = \frac{a^2 - b^2}{a} \quad b_1 = \frac{a^2 - b^2}{b}$$

$$R_a = a + a_1 \quad R_b = b + b_1$$

$$\int_{ab} = a + a_1 - b + b_1 = (a - b) \left[1 - (a + b) \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \right] = \frac{a^3 - b^3}{ab}$$

$$y^2 = \frac{8}{27} \frac{(x - \frac{1}{2})^3}{\frac{1}{4}}$$

Cykloids :



$$x = a(\varphi - \sin \varphi)$$

$$y = a(1 - \cos \varphi)$$

$$\arccos \frac{a-y}{a} = \varphi$$

$$x = a \arccos \frac{a-y}{a} - \sqrt{2ay - y^2}$$

$$dx = a(1 - \cos \varphi) d\varphi$$

$$dy = a \sin \varphi d\varphi$$

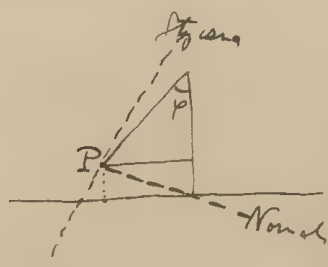
$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin \varphi}{1 - \cos \varphi}$$

Implet $\varphi=0$ coodiny
maximum dlo $\varphi=\pi$

$$y \frac{dy}{dx} = \int_n = a \sin \varphi$$

$$= \sqrt{2ay - y^2}$$

$$N = \sqrt{2ay}$$

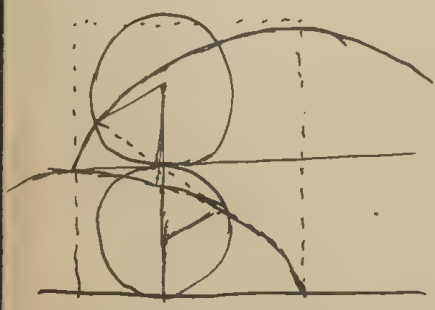


$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(1 - \cos \varphi) \sin \varphi + \sin^2 \varphi}{(1 - \cos \varphi)^2} \frac{d\varphi}{dx} = \frac{\cos \varphi - 1}{(1 - \cos \varphi)^2} \frac{1}{a(1 - \cos \varphi)} = -\frac{1}{a(1 - \cos \varphi)^2} = -\frac{a}{y^2}$$

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 + \left(\frac{2a}{y} - 1\right) = \frac{2a}{y}$$

$$R = -\left(\frac{2a}{y}\right)^{3/2} \frac{y^2}{a} = -2\sqrt{2ay} = -2N$$

2 tygo wyplywa ze Enduta toku hydroglozdy takoz samq:



2 tygo n. p. dtezon' toku $F = 2(R) = 4 \cdot 2a = 8a$

~~a pte $T = \frac{1}{2}$~~

co naturalnie toku hydroglozdy przez cotho ramu

~~$$\int \frac{2a}{y} dx = \int \frac{2a^2(1 - \cos \varphi) d\varphi}{a(1 - \cos \varphi)}$$~~

$$\int \sqrt{\frac{2a}{y}} dx = \int \sqrt{\frac{2a}{1 - \cos \varphi}} (1 - \cos \varphi) d\varphi = a \int \sqrt{2(1 - \cos \varphi)} d\varphi$$

$$= 2a \int \frac{\sin \varphi}{2} d\varphi = 4a \cos \frac{\varphi}{2} \Big|_0^{\pi} = 4a(1 - \cos \frac{\pi}{2}) \dots$$

Logarithmismo:

$$\frac{x}{a} = \log \frac{y}{b} \quad y = b e^{\frac{x}{a}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a} e^{\frac{x}{a}}$$

$$\frac{y}{\frac{dy}{dx}} = a \quad \text{--- } L_1$$

Sarimhova (cotinaria)

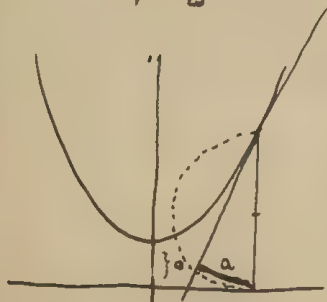
$$y = \frac{a}{2} (e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}})$$

$$y^2 = \frac{a^2}{4} (e^{\frac{2x}{a}} + 2 + e^{-\frac{2x}{a}})$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} (e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}})$$

$$y^2 - a^2 = \frac{a^2}{4} (e^{\frac{2x}{a}} - 2 + e^{-\frac{2x}{a}}) = \left[\frac{a}{2} (e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}) \right]^2$$

$$= \sqrt{\frac{y^2 - a^2}{a^2}}$$



$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2a} (e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}) = \frac{y}{a^2}$$

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{4} (e^{\frac{2x}{a}} - 2 + e^{-\frac{2x}{a}})} = \frac{1}{2} (e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}})$$

$$= \frac{y}{a}$$

~~$$F = x - R \frac{dy}{dx} = x - \frac{dy}{dx} \left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right) = x - \frac{y^2 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{a^2} = x - \frac{y^2 \sqrt{1 + \left(\frac{y}{a}\right)^2}}{a^2} = x - \frac{y^2 \sqrt{1 + \frac{y^2}{a^2}}}{a^2} = x - \frac{y^2 \sqrt{1 + \frac{y^2}{a^2}}}{a^2}$$~~

~~$$y = y + \frac{R}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} = y + \frac{y^2}{a^2} \frac{a^2}{y} = 2y \quad R = \frac{y^2}{a^2} \frac{a^2}{y} = \frac{y^2}{a} = N$$~~

$$N = y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \frac{y^2}{a}$$

Spiralna Archimedese

30

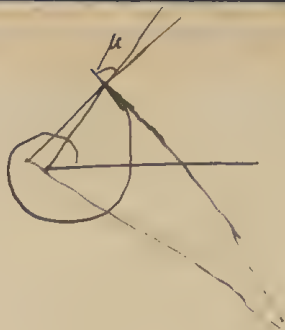
$$r = a \vartheta$$

$$\frac{r}{r'} = \frac{a}{a} = \vartheta$$

$$r' = a$$

$$L_t = r \frac{r}{r'} = a \vartheta^2$$

$$\boxed{L_r = \frac{r}{r'} = a}$$



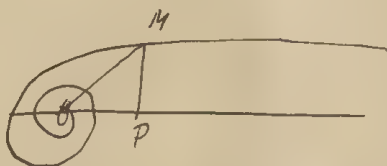
izračunamo f_r

$$r = \frac{a}{\vartheta}$$

$$r' = -\frac{a}{\vartheta^2}$$

$$MP = r \cdot r' \vartheta = a \frac{r \vartheta}{\vartheta}$$

$$\lim_{\vartheta \rightarrow 0} MP = a$$



$$\frac{r}{\vartheta} = -\frac{r \vartheta^2}{a} = -\vartheta$$

$$\boxed{L_t = -a}$$

$$L_r = -\frac{a}{\vartheta^2}$$

izračunamo f_r

$$r = a e^{m \vartheta}$$

$$r' = a e^{m \vartheta}$$

$$r' = a e^{m(\vartheta + \frac{1}{m} \ln \frac{a}{a})}$$

~~minimo je 2. vrsta točk, točka je ena, točka je ena, točka je ena~~

točka je 1. vrsta točk, točka je ena

$$\frac{dr}{d\vartheta} = m a e^{m \vartheta} = m r$$

$$\boxed{\frac{r}{r'} = \frac{1}{m}}$$

$$L_t = \frac{r}{m}$$

$$L_r = m r$$

$$N = \sqrt{m^2 + 1} \cdot r$$

$$ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\vartheta^2} = \sqrt{m^2 + 1} r d\vartheta = a \sqrt{m^2 + 1} e^{m \vartheta} d\vartheta = \frac{\sqrt{m^2 + 1}}{m} dr$$

$$s = \frac{\sqrt{m^2 + 1}}{m} r + \text{const}$$

$$R = \cancel{\frac{ds}{dr}} \frac{ds}{dt} = \frac{ds}{dr + dr} = \frac{ds}{dr} = \frac{r \sqrt{m^2 + 1} dr}{dr} = r \sqrt{m^2 + 1}$$

\parallel
 $\sqrt{1}$

$$\rho_1 = m \rho = m a e^{m \vartheta}$$

$$\vartheta + \frac{\pi}{2} = \vartheta_1$$

$$\rho_1 = m a e^{m(\vartheta_1 - \frac{\pi}{2})}$$

To być musi to sama krzywa jeli: $m e^{m(kr - \frac{\pi}{2})} = 1$

$$m \ln m = -(4k-1) \frac{\pi}{2}$$

Dla każdego k gotowa wartość m, która osiada w tej chwili --

$$r = 2a(1 + \cos \theta)$$

$$r' = -2a \sin \theta$$

$$r'' = -2a \cos \theta$$

$$\tan \mu = -\frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta}$$

Cardoida



$$R = \frac{(r'^2 + r''^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2r'r'' - r^2 r'''} = \frac{[8a^2(1 + \cos \theta)]^{\frac{3}{2}}}{4a^2(1 + \cos \theta)^2 + 8a^2 \sin^2 \theta + 4a^2(\cos \theta + \cos^3 \theta)} = \frac{8^{\frac{3}{2}}(1 + \cos \theta)^{\frac{3}{2}} \cdot a}{12(1 + \cos \theta)}$$

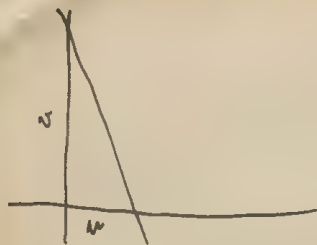
$$= \frac{16\sqrt{2}}{12} a (1 + \cos \theta)^{\frac{1}{2}} = \frac{4}{3} \sqrt{2} a$$

$$\varphi = \mu + \vartheta$$

$$\tan \varphi = \frac{\tan \mu + \tan \vartheta}{1 - \tan \mu \tan \vartheta} = \parallel$$

$$\tan \varphi = \frac{\frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} \tan \theta + 1}{\tan \theta - \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta}}$$

$$= \frac{\tan \theta + 2 \sin \theta}{\tan \theta \sin \theta - 1 - \cos \theta}$$



$$\frac{x}{u} + \frac{y}{v} = 1$$

$$uv = c^2$$

$$\frac{x}{u} + \frac{yu}{c^2} = 1$$

$$\frac{x}{u^2} - \frac{y}{c^2} = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{x}{u} + \frac{yu}{c^2} = 1 \\ \frac{x}{u^2} - \frac{y}{c^2} = 0 \end{array} \right\} u = c\sqrt{\frac{x}{y}}$$

$$\frac{x}{c\sqrt{\frac{x}{y}}} + \frac{y c \sqrt{\frac{x}{y}}}{c^2} = 1$$

$$\sqrt{xy} = \frac{c}{2}$$

$$xy = \frac{c^2}{4} \quad \text{Hyp. równoboczna}$$

Równanie krzywych II w spójnych liniowych

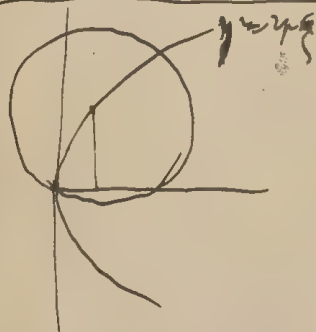
$$ux + vy = 1$$

$$Au^2 + Bv^2 = 0$$

$$Au^2 + B\left(\frac{1-ux}{y}\right)^2 = 0$$

$$Au^2 + B\frac{(1-ux)^2}{y^2} = 0$$

I stopnia dla $u = \dots$ wstawiać do krzywej



$$(y-\eta)^2 + (x-\xi)^2 = \eta^2 + \xi^2$$

$$(y-\eta)^2 + \left(x - \frac{\eta^2}{p}\right)^2 = \eta^2 + \frac{\eta^4}{p^2}$$

$$y^2 - 2\eta y + x^2 - 2x\xi = 0$$

$$y^2 - 2\eta y + x^2 - \frac{px^2}{p} = 0$$

$$-2y - \frac{2x\eta}{p} = 0$$

$$\eta = -\frac{py}{x}$$

$$y^2 + \frac{2py^2}{x} + x^2 - \frac{p^2 y^2}{x} = 0$$

$$y^2 + x^2 + \frac{p^2 y^2}{x} = 0$$

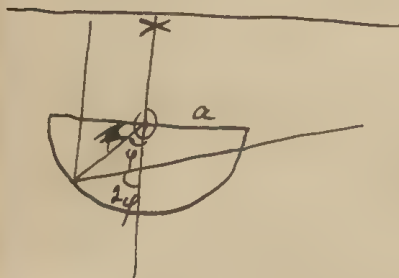
$$x^3 + (p+x)y^2 = 0 \quad \text{Cnidio}$$

$$a = \frac{p}{x}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad a + b = k$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{(k-a)^2} = 1$$

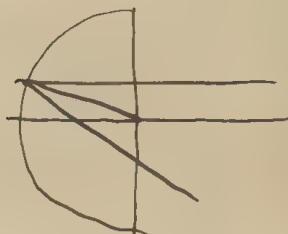
$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = k^{\frac{2}{3}}$$



$$y - y_1 = \tan 2\phi (x - x_1)$$

$$y_1 = a \sin \phi$$

$$x_1 = a \cos \phi$$



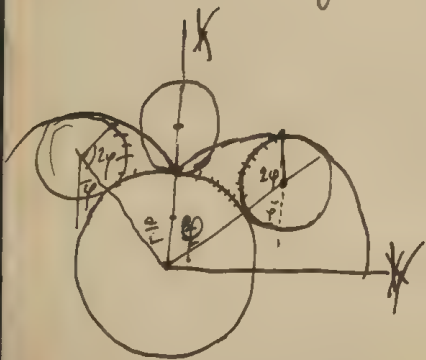
$$y - a \sin \phi = \tan 2\phi (x - a \cos \phi)$$

$$y \cos 2\phi - x \sin 2\phi + a \sin \phi = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \phi} : y \sin 2\phi + x \cos 2\phi - \frac{a}{2} \cos \phi = 0$$

$$x = \frac{a}{4} (3 \cos \phi - \cos 3\phi)$$

$$y = \frac{a}{4} (3 \sin \phi - \sin 3\phi)$$



$$x = \frac{3a}{4} \cos \phi - \frac{a}{4} \cos 3\phi$$

$$y = \frac{3a}{4} \sin \phi - \frac{a}{4} \sin 3\phi$$

$$x^2 + y^2 = r^2 =$$

$$\frac{a^2}{16} [10 - 6(\cos \phi \cos 3\phi + \sin \phi \sin 3\phi)]$$

$$r^2 = \frac{a^2}{8} [5 - 3 \cos 2\phi]$$

$$\frac{\partial x}{\partial \phi} = -\frac{3a}{4} \sin \phi + \frac{3a}{4} \sin 3\phi$$

$$\frac{\partial y}{\partial \phi} = \frac{3a}{4} \cos \phi - \frac{3a}{4} \cos 3\phi$$

$\phi = 0$

punkt erreicht

W prostolini:



$$y - y = \frac{\Delta y}{\Delta x} (\xi - x)$$

$$\xi - z = \frac{\Delta z}{\Delta x} (\xi - x)$$

$$\frac{y - y}{dy} = \frac{\xi - z}{dz} = \frac{\xi - x}{dx}$$

$$\cos \alpha = \frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}} = \frac{dx}{ds}$$

$$\frac{dx}{\cos \alpha} = \frac{dy}{\cos \beta} = \frac{dz}{\cos \gamma} = ds$$

Wznowyżna normalna: $(\xi - x) dx + (y - y) dy + (\xi - z) dz = 0$

Jedn: $x = \varphi(t), y = \psi(t), z = \chi(t)$

$$\frac{\xi - \varphi(t)}{\varphi'(t)} = \frac{y - \psi(t)}{\psi'(t)} = \frac{\xi - \chi(t)}{\chi'(t)}$$

$$[\xi - \varphi(t)] \varphi'(t) + [y - \psi(t)] \psi'(t) + [\xi - \chi(t)] \chi'(t) = 0$$

$$f(x, y, z) = 0 \quad F(x, y, z) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz = 0$$

$$dx = dz = dy = \xi - x = y - y = \xi - z$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} (\xi - x) + \frac{\partial f}{\partial y} (y - y) + \frac{\partial f}{\partial z} (\xi - z) &= 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x} \dots \dots \dots &= 0 \end{aligned} \right\}$$

$f(x, y, z) = 0$ jeżeli mamy $F(x, z) = 0$ to kryje się w płaszczyźnie o symetrii

względem: $(y-x) \frac{\partial f}{\partial x} + \dots = 0$ i tak samo $(y-x) \frac{\partial f}{\partial x} \dots = 0$

Wtedy wzdłuż tej $F \dots$ dochodzi, ponieważ tam są same wartości

$(y-x) \frac{\partial f}{\partial x} + \dots = 0$ zwróć uwagę na to, że wzdłuż tej symetrii

= płaszczyzna symetrii. [jeżeli $\frac{\partial f}{\partial x}$ itd. ≥ 0]
inaczej punkt ostrogi

Normalna:

$$\frac{f-x}{\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{y-y}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{z-z}{\frac{\partial f}{\partial z}}$$

jeżeli płaszczyzna symetrii przechodzi przez punkt x_0, y_0, z_0 :

$$\left. \begin{aligned} f(x, y, z) &= 0 \\ (x_0 - x) \frac{\partial f}{\partial x} + \dots &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ oznacza punktę symetrii = krytyczną}$$

Wtedy x_0, y_0, z_0 z jedyną taką punktem:

$$\frac{f-x_0}{x-x_0} = \frac{y-y_0}{y-y_0} = \frac{z-z_0}{z-z_0} \quad \text{wynagrodzić } x, y, z \text{ z } \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} = \text{ równanie płaszczyzny symetrii}$$

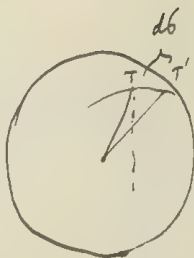
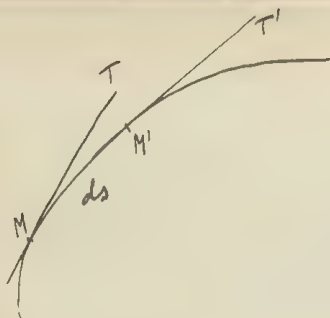
$$S = \lim \sum \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2} = \lim \sum \Delta s \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} \neq \lim \sum (\Delta x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} + \epsilon \Delta x)$$

$$ds = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}$$

$$\left. \begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \varphi \\ y &= r \sin \theta \sin \varphi \\ z &= r \cos \theta \end{aligned} \right\}$$

$$ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2}$$

$dx = ds \cos \alpha$
itd.



$$K = \lim_{\Delta s} \frac{\Delta \phi}{\Delta s} = \frac{d\phi}{ds}$$

$$db = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}$$

na
mp
yf

$$= \frac{\sqrt{(d\alpha)^2 + \dots}}{ds}$$

$$\xi = \cos \alpha = \frac{dx}{ds}$$

$$K = \frac{\sqrt{\left(d \frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(d \frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(d \frac{dz}{ds}\right)^2}}{ds} = \frac{1}{R}$$

$$= \frac{\sqrt{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2}}{ds}$$

jeżeli s = nieskończona

Styczna w punkcie T krzywej $\phi \equiv$ normalna główna w punkcie M

Kierunek jej $\overbrace{\varphi \psi \chi}^N$

$$\cos \varphi = \frac{d\phi}{ds} \quad \frac{d\phi}{ds} = \frac{d \cos \alpha}{ds} \quad \left| \quad \cos \psi = \frac{d\psi}{ds} \quad \cos \chi = \frac{d\chi}{ds} \right.$$

$$= \frac{ds}{d\phi} \frac{d \cos \alpha}{ds} = R \frac{d \frac{dx}{ds}}{ds} = R \frac{d^2 x}{ds^2} \quad \text{etc.}$$

Jeżeli s w przestrzeni NT wykreśliemy koło o promieniu R , to
środek jego \equiv środek krzywizny, a normalna prostopadła do NT w tym
punkcie = oś krzywizny

Trischnie: ona jst precizijem drach nishk. blakch storuymu vovnduzh.

Normaha : $(\xi-x) \cos \alpha + (\eta-y) \cos \beta + (\zeta-z) \cos \gamma = 0$ $V=0$

Nishk. blakha: $[\xi-x+\delta x](\cos \alpha + \delta \cos \alpha) + \dots = 0$ $V+dV=0$

$dV=0$: ~~drach~~

$(\xi-x) \frac{d \cos \alpha}{ds} + (\eta-y) \frac{d \cos \beta}{ds} + (\zeta-z) \frac{d \cos \gamma}{ds} - \underbrace{(dx \cos \alpha + dy \cos \beta + dz \cos \gamma)}_{ds} = 0$

$(\xi-x) \frac{d \cos \alpha}{ds} + \dots = 1$
 $\frac{\cos \varphi}{R}$

$(\xi-x) \cos \varphi + (\eta-y) \cos \psi + (\zeta-z) \cos \chi = R$ $\left. \begin{array}{l} \text{ } \\ \text{ } \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{ } \perp ds \text{ } N \\ \text{ } \text{odst. ot punkta } M=R \end{array}$

sta precizijem faktizirani =

Naizn sredka kuglovanij:

$x_1-x = R \cos \varphi$ sta

St kuglovanij: λ, μ, ν

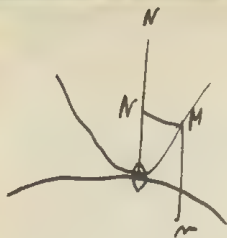
$\cos \lambda = \cos$

$\cos \alpha \cos \lambda + \cos \beta \cos \mu + \cos \gamma \cos \nu = 0$ $\left. \begin{array}{l} \text{ } \\ \text{ } \end{array} \right\} \begin{array}{l} \cos \chi \\ \cos \psi \end{array}$

$\cos \alpha \cos \varphi + \cos \beta \cos \psi + \cos \gamma \cos \chi = 0$

$\cos \lambda (\cos \alpha \cos \chi - \cos \varphi \cos \psi) + \cos \mu (\cos \beta \cos \chi - \cos \varphi \cos \psi) = 0$

$\left\{ \begin{array}{l} \cos \lambda = \cos \beta \cos \chi - \cos \varphi \cos \psi \\ \cos \mu = \cos \gamma \cos \chi - \cos \alpha \cos \psi \\ \cos \nu = \dots \end{array} \right\} = R \frac{d_1 d_2 - d_2 d_3}{ds^3}$



Styczna' u' ydu k' j'zili: $\frac{Mm}{(MN)^{k+1}} = sh$

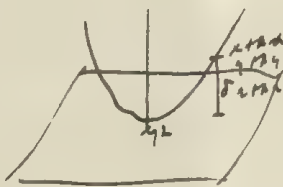
Styczna' wyjde j'zili: $\frac{Mm}{(MN)^{k+1}} = sh$ punkt w'zbyty j'zili:
 (styczna k'rywej zawarta w' p'ci'ni' p'ci'ni' styczna')

j'zili' n' st'et'yl to m'nia j' to'le

am'ny' z' b' d'ni n' s'om'ni'j, z' to' styczna' u' ydu (n-1)

P'k'z' u' ydu 3 st'et'yl, z' to' styczna' II ~~st'et'yl~~ u' ydu

$$a\xi + b\eta + c\zeta - p = 0$$



$$\delta = a(x + \Delta x) + b(y + \Delta y) + c(z + \Delta z) - p$$

$$\Delta x = \frac{dx}{dt} \Delta t + \frac{1}{2} \frac{d^2x}{dt^2} \Delta t^2 + \dots$$

$$\delta = \underbrace{ax + by + cz - p}_{=0} + \underbrace{\left(a \frac{dx}{dt} + b \frac{dy}{dt} + c \frac{dz}{dt}\right) \Delta t}_{=0} + \underbrace{\frac{1}{2} \left(a \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{d^2y}{dt^2} + c \frac{d^2z}{dt^2}\right) \Delta t^2}_{=0} + \dots$$

$$\frac{a}{\frac{dy}{dt} \frac{dz}{dt} - dz \frac{dy}{dt}} = \frac{b}{dz \frac{dx}{dt} - dx \frac{dz}{dt}} = \frac{c}{dx \frac{dy}{dt} - dy \frac{dx}{dt}}$$

$a = m \lambda$ st'et'yl $w'zbyty$ os'et' p'ci'ni' p'ci'ni' $= NT$

ptenye súčty = prechodi póm 3 msk. hskii punkty

$$ax + by + cz - p = 0$$

$$a(x + \frac{dx}{dt}) + b(y + \frac{dy}{dt}) + c(z + \frac{dz}{dt}) - p = 0$$

$$a(x + \frac{dx}{dt} + \frac{dx}{dt} - \frac{dx}{dt}) +$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a dx + b dy + c dz = 0 \end{array} \right.$$

$$a dx + b dy + c dz = 0$$

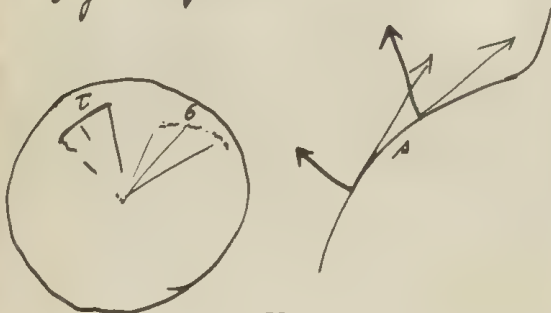
WTC: odrosteni moina skri'li: pt. d. jako pt. zardnyj 3 punkty

a normalna fono = pravit'ieji z pt. normala.

normalni pravit'ieji oia toki póm stany: póm msk. hskii
zavira kol' pravit'ieji.

Druge pravit'ieji: skryt

skryt (normalni) pravit'ieji



$$\frac{dr}{ds} = \text{skryt}$$

$$\frac{ds}{dr} = T = \text{promer skrytu}$$

$$dt = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}$$

Równanie pómnyj súčty:

$$(x - \xi)(dy dz - dz dy) + (y - \eta)(dz dx - dx dz) + (z - \zeta)(dx dy - dy dx) = 0$$

$$\begin{vmatrix} x - \xi & y - \eta & z - \zeta \\ dx & dy & dz \\ dx & dy & dz \end{vmatrix} = 0$$

$$d\tau^2 = (d\omega)^2 + (\dots)^2 + (\dots)^2$$

$$dx = ds \cos \alpha$$

$$r_x = \omega \lambda$$

$$d(\omega \alpha) = d\phi \omega \sin \alpha$$

$$r_y = \omega \mu$$

$$\sqrt{l^2 + m^2 + n^2} = \frac{ds^2}{R}$$

$$d(\cos \alpha) =$$

$$r_z = \omega \nu$$

$$\cos \lambda = R \frac{dy dz - dz dy}{ds^3} \approx \underbrace{dy dz - dz dy}_l = \frac{l}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}$$

$$d\tau^2 = \frac{(dl)^2 + (dm)^2 + (dn)^2}{l^2 + m^2 + n^2} + \frac{[l(l dl + m dm + n dn)]^2 + [\dots]^2 + [\dots]^2}{(l^2 + m^2 + n^2)^3}$$

$$- 2 \frac{(l dl + m dm + n dn)^2}{(l^2 + m^2 + n^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{dl^2 + dm^2 + dn^2}{l^2 + m^2 + n^2} - \frac{(l dl + m dm + n dn)^2}{(l^2 + m^2 + n^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{(l dm - m dl)^2 + (m dn - n dm)^2 + (n dl - l dn)^2}{(l^2 + m^2 + n^2)^2}$$

$$\begin{aligned} l &= dy dz - dz dy \\ m &= dz dx - dx dz \end{aligned} \quad \left| \quad \begin{aligned} dl &= dy dz - dz dy \\ dm &= dz dx - dx dz \end{aligned} \right.$$

$$l dm - m dl = (dy dz - dz dy)(dy dz - dz dy) - (dz dx - dx dz)(dz dx - dx dz)$$

$$= dz \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \\ d^3x & d^3y & d^3z \end{vmatrix}$$

$$d\tau^2 = \frac{\int^2 (d^2x + d^2y + d^2z)^2}{(l^2 + m^2 + n^2)^2} \frac{ds^4}{dt} = \frac{ds^4}{(l^2 + m^2 + n^2)^2} \begin{vmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{vmatrix} =$$

$$T = \frac{ds^6}{R^2} = \frac{dy dz - dz dy}{\dots}$$

size rovnocenné funkce

Limit $T = \infty$

$$\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ dx & & \\ dx & & \end{vmatrix} = 0$$

Limit \rightarrow jede Bewegung miteinander

$$dx \begin{vmatrix} d\dot{y} & d\dot{z} \\ dx & d\dot{z} \end{vmatrix} = 0$$

$$d \left(\frac{d\dot{y}}{dx} \right) = 0$$

$$d\dot{y} = 0 \, dx$$

$$\frac{dz}{dx} = B \frac{dy}{dx} + A$$

$$z = By + Ax + C$$

Kürze Skalarprodukt



$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2$$

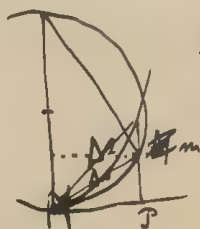
$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$$

$$(x-a)(\xi-x) + (y-b)(\eta-y) + (z-c)(\zeta-z) = 0$$

$$\frac{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}}{r}$$

$$M_m = MP - mP$$

$$= \frac{(x-a)(\xi-x) + \dots}{r}$$



$$MP = \frac{\Delta s^2}{2r}$$

$$M_m = MP - \frac{\Delta s^2}{2r}$$

$$\Delta s \begin{cases} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{cases}$$

$$mP = \frac{N_m^2}{2r} = \frac{NP^2 + P_m^2}{r} = \frac{NP^2 - MP^2 + P_m^2}{r} = \frac{\Delta s^2 - (P_m - MP)(P_m + MP)}{r}$$

$$2te \quad mP = \frac{\Delta s^2}{r}$$

$$-MP = \frac{(x-a)\Delta x + (y-b)\Delta y + (z-c)\Delta z}{r}$$

$$-(x-a)\Delta x + (y-b)\Delta y + (z-c)\Delta z - \frac{1}{2}\Delta s^2 = 0$$

$$\Delta x = \frac{dx}{ds} ds + \frac{1}{2} \frac{d^2x}{ds^2} ds^2 + \dots$$

$$\Delta x = \frac{dx}{ds} ds + \frac{1}{2} \frac{d^2x}{ds^2} ds^2 + \dots$$

$$(x-a) \frac{dx}{ds} + (y-b) \frac{dy}{ds} + (z-c) \frac{dz}{ds} = 0$$

$$(x-a) \frac{d^2x}{ds^2} + \dots + 1 = 0$$

$$(x-a) \frac{d^3x}{ds^3} + \dots = 0$$

$$\left(\frac{dx}{ds} + \left(\frac{dy}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dz}{ds} \right)^2 \right)^{1/2} = 1$$

$$\frac{dx}{ds} \frac{dx}{ds} + \dots = 0$$

$$V = (x-a)^2 + \dots - r^2 = 0$$

$$\frac{dV}{ds} = 0$$

$$\frac{d^2V}{ds^2} = 0$$

$$\frac{d^3V}{ds^3} = 0$$

Kružnice siveho styku = ta ktorá prechádza pres 4 nask bodmi pohl

$$V = (x-0)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 - r^2 = 0$$

$$V(x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z - 1) = 0$$

$$dV_1 = 0$$

V...

ide

$$(9-x) dx + (9-y) dy + (9-z) dz = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Rovnice normalny} \end{array} \right.$$

$$(9-x) dx + (9-y) dy + (9-z) dz - ds^2 = 0$$

$$(9-x) dx + \dots$$

$$= 0$$

Tesam 3 rovnice je
tam ktori stoji do druheho

$$9-x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & dy & dz \\ ds^2 & dy & dz \\ 0 & ds^2 & dz \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ ds^2 & dy & dz \\ 0 & ds^2 & dz \end{vmatrix}}$$

$$= ds^2 \frac{\begin{vmatrix} dy & dz \\ ds^2 & dz \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} dy & dz \\ ds^2 & dz \end{vmatrix}}$$

$$\frac{dy dz - dz dy}{ds^4} =$$

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{dy dz - dz dy}{ds^3} \right)$$

$$\frac{\cos \phi}{R}$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} dy & dz \\ ds^2 & dz \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} dy & dz \\ ds^2 & dz \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{d}{ds} \left(\frac{\cos \phi}{R} \right)$$

$$= \cos \phi \frac{d}{ds} \frac{1}{R} + \frac{1}{R} \frac{d \cos \phi}{ds}$$

$$= R \cos \phi - T \frac{dR}{ds} \cos \phi$$

$$R^2 = (9-x)^2 + \dots$$

$$(9-x) \cos \alpha + (9-y) \cos \beta \dots = 0$$

$$(9-x) \cos \phi + \dots$$

$$(9-x) \cos \lambda + \dots$$

$$= R$$

$$= -T \frac{dR}{ds}$$

$$r^2 = R^2 + T^2 \left(\frac{dR}{ds} \right)^2$$

$$= T^2 \frac{dR}{ds} = \sqrt{r^2 - R^2} \cdot R$$

$$(x-\xi) \cos \alpha + \dots = 0$$

$$(x-\xi) \frac{d \cos \alpha}{ds} + \dots = - \frac{dx \cos \alpha + \dots}{ds} = R$$

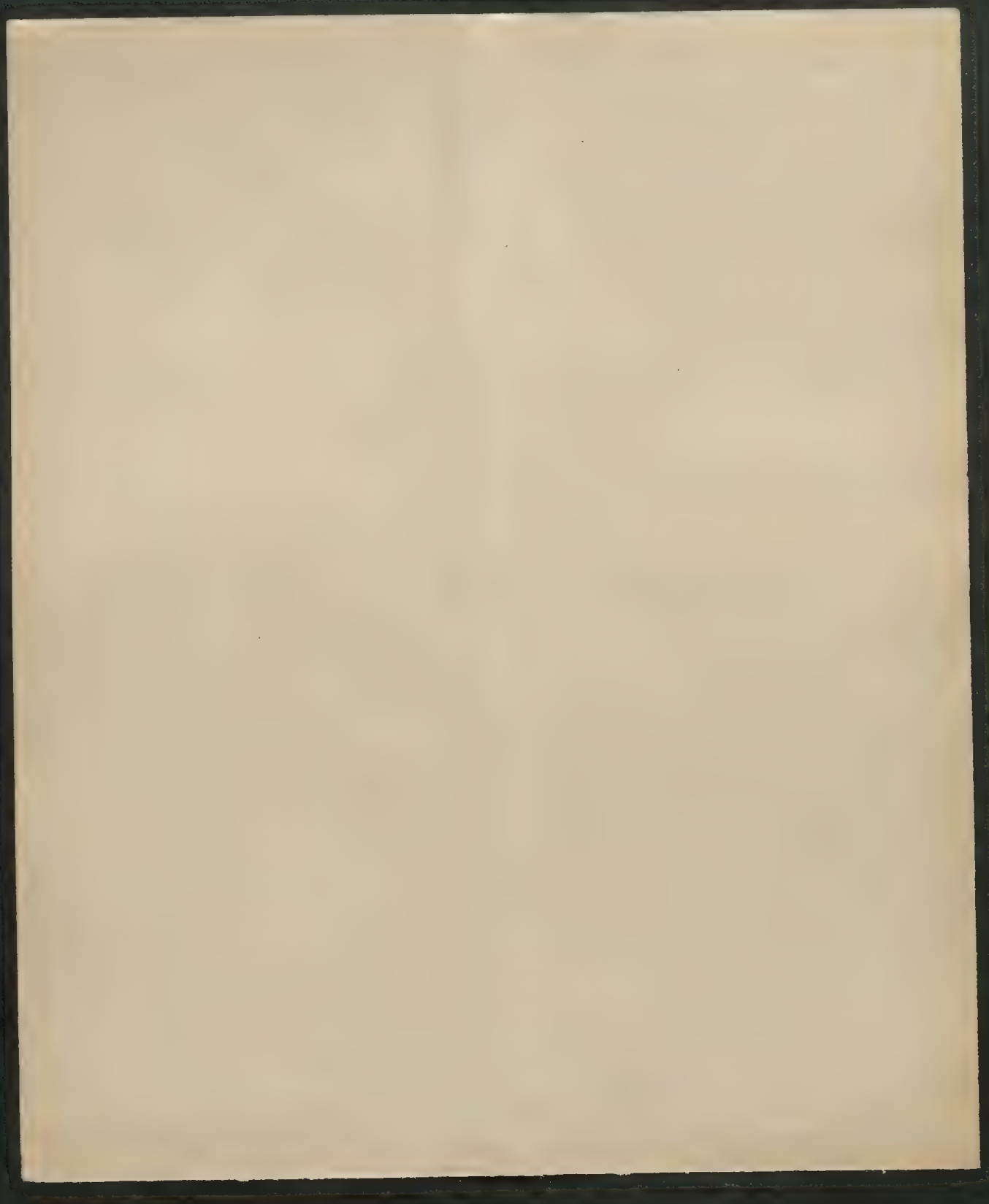
$$(x-\xi) \cos \gamma + \dots = R$$

$$(x-\xi) \left(\cos \lambda \frac{dx}{ds} + \sin \lambda \frac{dy}{ds} \right) + \dots = \frac{dR}{ds}$$

$$(x-\xi) \cos \lambda = T \frac{dR}{ds}$$

$$(x-\xi) = R \cos \gamma - T \frac{dR}{ds} \cos \lambda$$

$$r^2 = R^2 + T^2 \frac{dR^2}{ds^2}$$



$$\begin{aligned} \omega^I \alpha \omega^I + \omega^J \omega^J + \omega^K \omega^K &= 0 \\ \omega^I \alpha + \omega^J \beta + \omega^K \gamma &= 0 \end{aligned} \quad \parallel \quad \begin{aligned} \omega^I d\alpha + \omega^J d\beta + \omega^K d\gamma &= 0 \\ \omega^I d\omega^I + \omega^J d\omega^J + \omega^K d\omega^K &= 0 \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt} \dots \left. \begin{aligned} \omega^I d\alpha + \omega^J d\beta + \omega^K d\gamma &= 0 \\ \omega^I d\omega^I + \omega^J d\omega^J + \omega^K d\omega^K &= 0 \end{aligned} \right\}$$

$$\frac{d(\omega^I)}{d(\omega^I)} = \frac{d(\omega^J)}{d(\omega^J)} = \frac{d(\omega^K)}{d(\omega^K)}$$

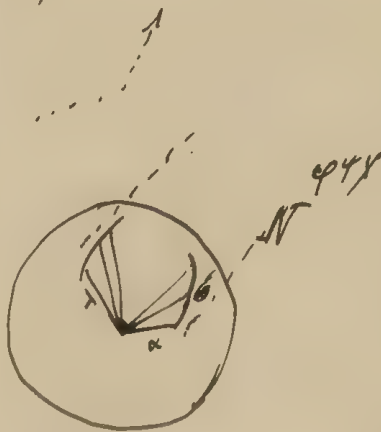
$$d\omega^I = \omega^J d\omega^J$$

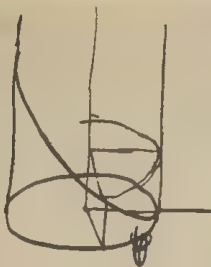
$$\frac{d\omega^I}{\sqrt{1 - \omega^I^2}} = \frac{d\omega^I}{dt}$$

$$\begin{cases} d\omega^I = \omega^J dt \\ d\omega^J = \omega^K dt \\ d\omega^K = \omega^I dt \end{cases}$$

$$\omega^J = \omega^K \omega^I - \omega^I \omega^K$$

$$d\omega^I = \underbrace{(\omega^K \omega^J - \omega^J \omega^K)}_{-\omega^I} dt + \underbrace{(\omega^K \omega^I - \omega^I \omega^K)}_{-\omega^J} dt$$





$$x = a \cos \phi$$

$$y = a \sin \phi$$

$$z = a \phi \cot \epsilon$$

$$dx = -a \sin \phi d\phi$$

$$dy = a \cos \phi d\phi$$

$$dz = a \cot \epsilon d\phi$$

$$ds = \frac{a d\phi}{\sin \epsilon}$$

$$\cos \alpha = \frac{dx}{ds} = -\sin \epsilon \sin \phi$$

$$\cos \beta = \sin \epsilon \cos \phi$$

$$\cos \gamma = \cos \epsilon = \text{const!}$$

$$d(\cos \alpha) = d\phi \cos \phi = -\sin \epsilon \cos \phi d\phi$$

$$d\phi \cos \phi = -\sin \epsilon \sin \phi d\phi$$

$$d\phi \cos \phi = 0$$

$$d\phi = \sin \epsilon d\phi$$

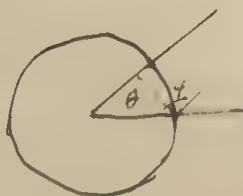
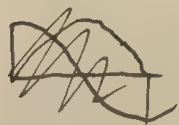
$$\cos \phi = -\cos \theta$$

$$\cos \phi = -\sin \theta$$

$$\cos \chi = 0$$

1.sten Normales
zum os'

2.sten



$$\cos \phi = -\cos \theta$$

$$\cos \phi = \cos(\phi_0 + \phi) = \sin \phi = -\sin \theta$$

$$\theta = \pi + \phi$$

$$R^2 = \frac{ds}{d\phi} = \frac{a d\phi}{\sin \epsilon d\phi} = \frac{a}{\sin^2 \epsilon} = \text{const!}$$

$$ds^2 = d\phi^2$$

$$\cos \alpha = \cos \phi \cos \chi - \cos \gamma \cos \phi = +\cos \epsilon \sin \theta$$

$$\cos \mu = \cos \phi \cos \chi - \cos \alpha \cos \chi = -\cos \epsilon \cos \theta$$

$$\cos \nu = \cos \alpha \cos \phi - \cos \beta \cos \phi = +\sin \epsilon \sin^2 \theta + \sin \epsilon \cos^2 \theta = \sin \epsilon = \text{const!}$$

$$d\tau^2 = (dx^2)^2 + \dots = d\phi^2 \cos^2 \epsilon$$

$$T = \frac{ds}{dt} = \frac{a d\phi}{\sin \epsilon \cos \epsilon d\phi} = \frac{a}{\sin \epsilon \cos \epsilon} = \text{const!}$$

Obriednie

$$\left. \begin{aligned} f(x, y, z, \alpha) &= 0 \\ f(x, y, z, \alpha) = 0 \dots \frac{\partial f}{\partial \alpha} &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{dla } \alpha \text{ wyznacz} \\ \text{charakterystyka} \end{array}$$

Jżeli 3 parametry: trzeci współrzędny $\frac{\partial f}{\partial z} = 0$
 jeden parametry charakterystyka = punkt
 from miejscu tego punktu (wynoszący α) = Rückkehrkurve
 arrête de rebroussement
 krzywa zwrotna

Parametryczne obriednie

obriednie systemu prostych

$$ax + by + cz - p = 0 \quad \text{dla } p = f(\alpha)$$

$$a'x + b'y + c'z - p' = 0$$

charakt. = prosta

Obr. ma styczności z ~~parametrycznym~~ parametrycznym systemem wartości charakterystyki

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = 0 \quad \left. \vphantom{\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = 0} \right\} \text{w pow.}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \dots + \frac{\partial f}{\partial \alpha} d\alpha = 0 \quad \left. \vphantom{\frac{\partial f}{\partial x} dx + \dots + \frac{\partial f}{\partial \alpha} d\alpha = 0} \right\} \text{wartości charakt. obriednie}$$

wsp. jeżeli dx, dy to da równanie

Analizujemy:

Równ. charakt. $\begin{cases} f=0 \\ f'=0 \end{cases}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = 0$$

$$\frac{\partial f'}{\partial x} dx + \frac{\partial f'}{\partial y} dy + \frac{\partial f'}{\partial z} dz = 0$$

Te same Równania stają się ^{dla krzywej} ~~linii~~ ^{zwrótu}

Zatem: Wypukłość charakt. są styczne do krzywej zwrótu.

Ponieważ punkt = charakterystyka systemu odwróconego = styczna do krzywej zwrótu
to pow. odwróconego = miejsce geom. przecięcia stycznych krzywej.

2^o ~~punkt~~ / ~~inwersja~~ = płaszczyzna styczna do krzywej zwrótu

$$\left. \begin{aligned} ax + by + cz - p &= 0 \\ a'x + b'y + c'z - p' &= 0 \\ a''x + b''y + c''z - p'' &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} ax + by + cz &= p \\ a'x + b'y + c'z &= p' \\ a''x + b''y + c''z &= p'' \end{aligned} \quad \left. \begin{aligned} ax + by + cz &= p \\ a'x + b'y + c'z &= p' \end{aligned} \right\} \begin{aligned} (ax + by + cz) + \dots &= 0 \\ a'x + b'y + c'z &= 0 \end{aligned}$$

wtedy te same równania $\begin{aligned} ax + by + cz &= p \\ a'x + b'y + c'z &= p' \\ a''x + b''y + c''z &= p'' \end{aligned}$

Osi krzyw. były naszymi prozami:

$V=0$, $M=0$, a na niej środek kulki i.e. $KV=0$

wtedy tworzą system styczny, którego średnica = $\frac{1}{2}$ pow. kolumny,

a na niej środek kulki i.e. = krzywa zwrótu

$$\frac{R}{\cos \theta} = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}}{\frac{\partial z}{\partial x} \cos \alpha + 2 \frac{\partial z}{\partial xy} \cos \alpha \cos \beta + \frac{\partial z}{\partial y} \cos \beta}$$

Jżeli $\theta = 0$:

$$R_0 = \sqrt{\dots}$$

$$\text{wzysk } R = R_0 \cos \theta$$

R = stały R oraz pewny normalny kąt zwrócenia styku, i cos kąta kąt to pewien kąt z pewną stałością kątową.

Wz. tylko kątów pewny normalny kąt zwrócenia.

Wz. tylko kątów pewny normalny kąt zwrócenia

$$\sqrt{1 + p^2 + q^2} = 1$$

$$\cos \beta = 0 \quad \cos \beta = \sin \alpha$$

$$\frac{1}{R} = r \cos \alpha + 2s \sin \alpha + t \sin^2 \alpha = \frac{r+t}{2} + \frac{r-t}{2} \cos 2\alpha + s \sin 2\alpha$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{R} \right) = 2(t-r) \sin \alpha + 2s (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = 0$$

$$(t-r) \sin 2\alpha + 2s \cos 2\alpha = 0$$

$$\tan 2\alpha_0 = \frac{2s}{r-t} \quad \begin{matrix} \text{Max} \\ \text{Min} \end{matrix}$$

$$\frac{1}{R} = \frac{r+t}{2} + \frac{r-t}{2} \cos 2\alpha_0$$

$$\frac{1}{R} = \frac{r+t}{2} + \frac{r-t}{2} \left[\cos 2\alpha + \frac{2s \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha_0} \right] \sin 2\alpha_0$$

$$\cos 2\alpha_0 = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4s^2}{(r-t)^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4s^2}{(r-t)^2}}}$$

$$\frac{1}{R} = \frac{r+t}{2} + \cos 2(\alpha - \alpha_0) \sqrt{s^2 + \left(\frac{r-t}{2}\right)^2}$$

Max. n.p. dla $\alpha = \alpha_0$

Min. dla $\alpha = \alpha_0 + \pi$

$$\text{Re} \quad \frac{1}{R_1} = \frac{r+t}{2} + \sqrt{s^2 + \left(\frac{r-t}{2}\right)^2}$$

$$\text{Im} \quad \frac{1}{R_2} = \frac{r+t}{2} - \sqrt{s^2 + \left(\frac{r-t}{2}\right)^2}$$

$$\underline{\underline{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \left(\frac{r+t}{2}\right)}}$$

$$\left[\begin{aligned} \frac{1}{R_1} &= \frac{r+t}{2} + \omega \varepsilon \\ \frac{1}{R_2} &= \frac{r+t}{2} - \omega \varepsilon \end{aligned} \right] \quad \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{r+t}{2}$$

$$2 \frac{1}{R_1} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) + \underset{1-2\sin^2 \varepsilon}{\omega 2\varepsilon} \cdot \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = 2 \frac{1}{R_1} \omega^2 \varepsilon + \frac{2}{R_2} \sin^2 \varepsilon$$

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R_1} \omega^2 \varepsilon + \frac{1}{R_2} \sin^2 \varepsilon$$

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R_1} \cos^2 \left(\frac{r+t}{2} \right) + \frac{1}{R_2} \sin^2 \left(\frac{r+t}{2} \right) = \frac{\sin^2 \varepsilon}{R_1} + \frac{\omega^2 \varepsilon}{R_2}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} &= \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \end{aligned} \right\}$$

Čy R zachová vopri tu sam znak zohľadňujúci $\frac{r+t}{2}$

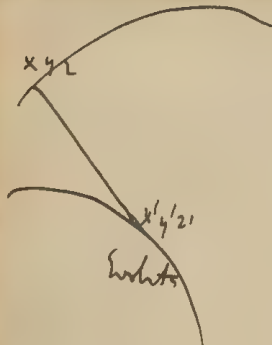
$$\frac{1}{R_1} \frac{1}{R_2} = \left(\frac{r+t}{2} \right)^2 - \left[s^2 + \left(\frac{r-t}{2} \right)^2 \right] = \underline{\underline{rt - s^2}}$$

keďže je $rt > s^2$ to znamená, že $\frac{1}{R_1}$ a $\frac{1}{R_2}$ sú kladné
(Elopaída, Hypot. II, Parab. elpt.)

keďže $rt < s^2$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} \omega^2 \varepsilon - \frac{1}{R_2} \sin^2 \varepsilon = 0 \quad \text{dla } \varepsilon = \sqrt{\frac{R_2}{R_1}} \quad \text{Hypot. I, Parab. hyp.}$$

$rt = s^2 \parallel R_2 = \infty$ [Všetci: Striky voproti porovnaniu objasnenia]



$$u = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2}$$

$$x' - x = u \cos \alpha'$$

$$y' - y = u \cos \beta'$$

$$z' - z = u \cos \gamma'$$

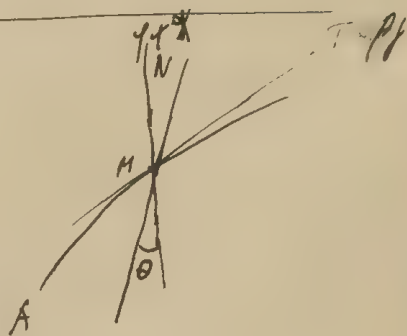
$$ds' = du$$

$$1). \quad dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = p dx + q dy$$

$$2). \quad dp = r dx + s dy$$

$$dq = s dx + t dy$$

$$d^2 z = r dx^2 + 2s dx dy + t dy^2$$



$$3). \quad \cos \alpha = \frac{1}{R} \frac{dx}{ds} \dots$$

$$4). \quad \cos \beta = \frac{1}{R} \frac{dy}{ds} \dots$$

$$\text{Normal vector: } \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\sqrt{1+p^2+q^2}} = \frac{-p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \frac{-q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$$

$$\cos \theta = \frac{-x - p \cos \gamma - q \cos \delta}{\sqrt{1+p^2+q^2}} = \frac{dxy - p dux - q dyp}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$$

$$1). \therefore \cos \beta = p \cos \alpha + q \cos \gamma$$

$$2). \quad dp = R d\theta (r \cos \alpha + s \cos \gamma)$$

$$dq = R d\theta (s \cos \alpha + t \cos \gamma)$$

$$dxy = (p dux + q dyp) + (dp ux + dq yp)$$

$$\cos \theta = \frac{R}{r \cos^2 \alpha + 2s \cos \alpha \cos \gamma + t \cos^2 \gamma}$$

jeżeli $R_1 = R_2$: $s^2 - \left(\frac{r-x}{b}\right)^2 = 0$

$\begin{cases} s=0 \\ r=x \end{cases}$ Nohelpunkte

N₁ Algebra

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2z}{c^2} \frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = - \frac{c^2 x}{a^2 z}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = - \frac{c^2}{a^2 z} + \frac{c^2 x}{a^2 z^2} \frac{\partial z}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = - \frac{b^2 y}{b^2 z}$$

$$r = - \frac{c^2}{a^2 z} - \frac{c^4 x^2}{a^4 z^3} \Big|_{z=c} = - \frac{c^4}{a^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = + \frac{c^2 y}{b^2 z^2} \frac{\partial z}{\partial x} = - \frac{c^4 x y}{a^2 b^2 z^3}$$

$$t = - \frac{c^2}{b^2 z} - \frac{c^4 y^2}{b^4 z^3} = - \frac{c^4}{b^2}$$

$$\neq 0$$

$$s = \frac{+ c^2}{a^2 z^2} \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{2 c^2 x}{a^2 z^3} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) + \frac{c^2 x}{a^2 z^2} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

4 takie punkty na króćcach on wielkości i masy

$$r = \frac{c^4 \left(\frac{z^2}{a^2} + \frac{x^2}{a^2} \right)}{a^2 z^3} = \frac{c^4 (b^2 - y^2)}{a^2 b^4 z^3}$$

$$z = z_0 + p \Delta x + q \Delta y + \left(r \frac{\Delta x^2}{2} + s \Delta x \Delta y + t \frac{\Delta y^2}{2} \right) + \dots$$

Indicatrix

$$r \xi^2 + 2s \xi \eta + t \eta^2 = \pm c$$

Kružka II obvislona do modula q .

$$a_{11} x^2 + 2a_{12} x y + a_{22} y^2 + a_{44} = 0$$

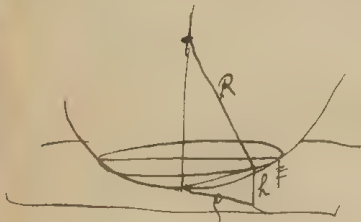
 $a_{12}^2 - a_{11} a_{22} > 0$ Hiperbolna krivica < 0 Eliptična $= 0$ Parabolična krivica

(2 prave)

$$s^2 - ct^2 > 0 \text{ Hip. } \frac{1}{R} = \frac{1}{R_0}$$

$$s^2 - ct^2 < 0 \text{ El. } \frac{1}{R} < \frac{1}{R_0}$$

$$s^2 = ct^2 \text{ Am. } \frac{1}{R} = \frac{1}{R_0}$$



$$R = \frac{p^2}{h^2} = \frac{r^2 \cos^2 \alpha + t^2 \sin^2 \alpha}{r^2 \cos^2 \alpha + 2s \cos \alpha \sin \alpha + t^2 \sin^2 \alpha}$$

$$= \frac{p^2}{r^2 \cos^2 \alpha + 2s \cos \alpha \sin \alpha + t^2 \sin^2 \alpha} = \frac{1}{r^2 \cos^2 \alpha + 2s \cos \alpha \sin \alpha + t^2 \sin^2 \alpha}$$

Wizg. the same result as predicted

Da predstavi sferu svojih Indicirna igdjei kotu.

$$R = \frac{\sqrt{1+p^2+q^2}}{r \cos^2 \alpha + 2s \cos \alpha \sin \alpha + t \sin^2 \alpha}$$

$$u^2 = p \cos \alpha + q \sin \alpha \quad |^2$$

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$$

$$\cos^2 \alpha (1+p^2) + 2p \cos \alpha \sin \alpha + (1+q^2) \sin^2 \alpha = 1$$

$$(1+p^2 - \frac{R_2}{\sqrt{1+p^2+q^2}}) \cos^2 \alpha + 2(p - \frac{R_s}{\sqrt{1+p^2+q^2}}) \cos \alpha \sin \alpha + (1+q^2 - \frac{R_t}{\sqrt{1+p^2+q^2}}) \sin^2 \alpha = 0$$

Jind R done to $\frac{u^2}{v^2}$ range

4 punktasi slayernya \downarrow to must be in anasone, set $\frac{u^2}{v^2} = 0$

$$\frac{1+p^2}{2} = \frac{1+q^2}{2} = \frac{1+p}{1} = \frac{R}{\sqrt{1+p^2}}$$

N. f. slayernya:

$$-\frac{1+\left(\frac{c^2x}{a^2}\right)^2}{\frac{c}{a^2}} = -\frac{1+\left(\frac{c^2y}{b^2}\right)^2}{\frac{c}{b^2}} = -\frac{\frac{c^4xy}{a^2b^2}}{\frac{c^4xy}{a^2b^2}} = -2 = \frac{R}{\sqrt{1+}}$$

$$1+\left(\frac{c^2x}{a^2}\right)^2 = \frac{2c}{a^2} \quad \left| \quad 1+\left(\frac{c^2y}{b^2}\right)^2 = \frac{2c}{b^2}\right.$$

$$1 = -\frac{c^2x}{a^2}$$

$$p = -\frac{c^2y}{b^2}$$

$$r = -\frac{c^2(b^2-y^2)}{a^2b^2}$$

$$s = -\frac{c^4xy}{a^2b^2}$$

$$t = -\frac{c^4(a^2-x^2)}{a^2b^2}$$

No pakeja at $\frac{u^2}{v^2}$ ~~...~~

$$\frac{1+\left(\frac{c^2x}{a^2}\right)^2}{-\frac{c^2}{a^2} - \frac{c^4x^2}{a^4}} = \frac{1+\left(\frac{c^2y}{b^2}\right)^2}{-\frac{c^2}{b^2} - \frac{c^4y^2}{b^4}} = -2 \quad \left| \quad \frac{-\frac{c^4(b^2-y^2)}{a^2b^2}}{1+\frac{c^4x^2}{a^4}} = \frac{-\frac{c^4xy}{a^2b^2}}{\frac{c^4xy}{a^2b^2}} = \frac{1}{2}\right.$$

$$\frac{c^4(b^2-y^2)}{b^2} = a^2x^2 + \frac{c^4x^2}{a^2}$$

$$\frac{c^2}{b^2}(b^2-y^2) = a^2\frac{x^2}{c^2} + \frac{c^2x^2}{a^2}$$

$$c^2 - \frac{a^2x^2}{c^2} = c^2\left(1 - \frac{x^2}{c^2}\right)$$

Take same:

$$1+\left(\frac{c^2x}{a^2}\right)^2 = \frac{c^2}{a^2} + \frac{c^4x^2}{a^4}$$

$$\frac{a^4x^2 + c^4x^2}{a^4} = \frac{a^2c^2x^2 + c^4x^2}{a^4} \quad (a^2 - c^2)x^2 = 0$$

$$(b^2 - c^2)x^2 = 0$$

Tak samo dla innych wartości albo $x, y, z = 0$

$$\left(\frac{c^2}{b^2} + \frac{c^4 y^2}{b^4 z^2}\right) \left(1 + \frac{c^4 x^2}{a^4 z^2}\right) = \left(\frac{c^2}{a^2} + \frac{c^4 x^2}{a^4 z^2}\right) \left(1 + \frac{c^4 y^2}{b^4 z^2}\right)$$

$$\frac{c^2}{b^2} + \frac{c^4 y^2}{b^4 z^2} + \frac{c^6 x^2}{a^4 b^2 z^2} = \frac{c^2}{a^2} + \frac{c^4 x^2}{a^4 z^2} + \frac{c^6 y^2}{a^2 b^4 z^2}$$

$$\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right) + \frac{c^2}{z^2} \left(\frac{y^2}{b^4} - \frac{x^2}{a^4}\right) + \frac{c^4}{a^2 b^2 z^2} \left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right) = 0$$

$$+ \frac{x^2 c^2}{a^4 z^2} \left[\frac{c^2}{b^2} - 1\right] + \frac{y^2 c^2}{b^4 z^2} \left[1 - \frac{c^2}{a^2}\right] = 0$$

$$\frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$$

$$\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right) \frac{a^2 - b^2}{a^2 b^2} + \frac{x^2}{a^4} \left[\frac{c^2}{b^2} - 1\right] + \frac{y^2}{b^4} \left[1 - \frac{c^2}{a^2}\right] = 0$$

$$(a^2 - b^2) + x^2 \left[\frac{c^2}{b^2} - \frac{a^2 - b^2}{a^2}\right] + y^2 \left[\frac{a^2 - b^2}{b^2} - \frac{a^2 - b^2}{a^2}\right] = 0$$

$$\frac{a^2 - b^2}{a^2 b^2} + x^2 \left[\frac{c^2}{b^2} - \frac{a^2 - b^2}{a^2}\right] + y^2 \left[\frac{a^2 - b^2}{b^2} - \frac{a^2 - b^2}{a^2}\right] = 0$$

$$(a^2 - b^2) + x^2 \frac{c^2 - a^2}{a^2} + y^2 \frac{b^2 - c^2}{b^2} = 0$$

Jeżeli $a > b > c$:

$$a^2 - b^2 = -y^2 \frac{b^2 - c^2}{b^2} + x^2 \frac{a^2 - c^2}{a^2}$$

$$\text{N.p. } y = 0$$

$$x = \pm a \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}}$$

$$z = \pm c \sqrt{\frac{c^2 - b^2}{c^2 - a^2}}$$

Jeżeli rozważać o stycznej punktu P wykreślinę normalną na obszarze
kółka to tyłko 2 z nich przecię się normalną w P



z tyłu punktów enów dają się
linie krzywiznowe

Jeżeli wystawimy sobie indycatnie (wskazniki) to widzimy

(promieni element powierzchni ma nie więcej jego długości)

[w pierwszym przypadku jego pow. I, w drugim jego pow. II]

że to kierunku będą się różniły w indycatnie zata promieni głównych krzywizny

Wzr ^{2-systowy} linii krzywiznowych 1. w kierunku jednego przecięcia głównego
2. w kierunku drugiego " "

One to systemy 1 i 2 w całości powierzchni rozkrojona na \square elementy \square

Genosa Miara Krzywizny

Na ^{krzywej} elemencie pow. wykreślinę normalną; i z pierwszego środka kuli prostą równoległą

która wytnie na jej pow. powierzchnię ϕ Miara krzyw. = $\frac{\text{pole } \phi}{\text{pole } \phi}$

Jako taki element ϕ obieramy jeden taki element utworzony przez linie



$$df = ds_1 ds_2$$

$$df = ds_1 ds_2 = \frac{ds_1}{R_1} \cdot \frac{ds_2}{R_2} = \frac{df}{R_1 R_2}$$

$$K_g = \frac{1}{R_1 R_2}$$

linii krzywiznowej

Noradno: $\xi = \frac{-x}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-2}{-1}$

1) $\begin{cases} \xi - x + p(\xi - 2) = 0 \\ y - y + q(\xi - 2) = 0 \end{cases} \parallel$ $\begin{cases} \text{punktowi miarce blizki:} \\ \xi - x - dx + (p + dp)(\xi - 2 - dz) = 0 \end{cases}$

2) $\begin{cases} +dx \pm dp(\xi - 2) + p dz = 0 \\ dy \pm dq(\xi - 2) + q dz = 0 \end{cases} = \frac{dx + p dz}{dp} = \frac{dy + q dz}{dq} \quad (3).$

poniewaz jednak punkt miarce blizki ma dwie no porownujemy

$$dz = p dx + q dy \quad dp = r dx + s dy$$

$$dq =$$

Kladzemy to do (3): $\frac{(1+p^2)dx + pq dy}{r dx + s dy} = \frac{pq dx + (1+q^2)dy}{s dx + t dy}$

Co moze ~~byc~~ wyznaczalne:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + P \frac{dy}{dx} + Q = 0$$

$$P = \frac{(1+p^2)t - (1+q^2)r}{pq - (1+q^2)r}$$

$$Q = \frac{(1+p^2)s - pq^2}{pq - (1+q^2)r}$$

Linie asymptotyczne punkty w kierunku

~~gdzie $R=0$~~ gdzie $R=\infty$

1. skł. sił'owe = stykano do pow.

to zawsze 3 punkty wierz. blukii

$$2\cos 2 + 2\sin 2 \sin \theta \cos \theta = 0$$

$$\cos \alpha = \frac{dx}{ds} \quad \sin \beta = \frac{dy}{ds}$$

$$2 + 2s \frac{dy}{dx} + t \frac{dy}{dx} = 0$$

Linie poziom = przekroji płaszczyzn $\parallel XY$

$$dz = p dx + q dy = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{p}{q}$$

Linie najniższego spadku, gdzie stykano jest to miejsce wektora normalnego do powierzchni które ma najniższe nachylenie — więc \perp do linii

poziom $\frac{dy}{dx} = \frac{p}{q}$ [kąt system ortogonalny]

Kr. elipsoidalne $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

$$p = -\frac{cx}{a^2z}$$

$$q = -\frac{cy}{b^2z}$$

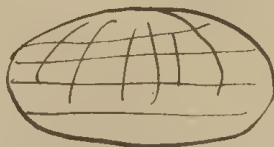
$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_n = -\frac{b^2x}{a^2y}$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_n = \frac{a^2y}{b^2x}$$

$$b^2 \frac{dy}{y} = a^2 \frac{dx}{x}$$

$$\ln y^{b^2} = \ln x^{a^2}$$

$$y = C x^{\frac{a^2}{b^2}} \quad \text{zerówno z równ. d.}$$



Coniurchni ~~bez~~ potrijni ottyondn

25

$$\left. \begin{aligned} f_1(x, y, z) &= 1 \\ f_2(x, y, z) &= \mu \\ f_3(x, y, z) &= \nu \end{aligned} \right\} \text{main. uslovi: } \begin{aligned} x &= F(\lambda, \mu, \nu) \\ y &= \\ z &= \end{aligned} \quad \begin{aligned} &\lambda, \mu, \nu \\ &\text{werid joko} \\ &\text{ottyondn} \end{aligned}$$

Wamuk:

Norma, $\frac{\partial \lambda}{\partial x} \quad \frac{\partial \lambda}{\partial y} \quad \frac{\partial \lambda}{\partial z}$

$$L = \sqrt{\left(\frac{\partial \lambda}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial z}\right)^2}$$

$$2 \quad \frac{\frac{\partial \mu}{\partial x}}{M} \quad \dots$$

$$\frac{\frac{\partial \nu}{\partial x}}{N} \quad \dots$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x} \frac{\partial \mu}{\partial x} + \frac{\partial \lambda}{\partial y} \frac{\partial \mu}{\partial y} + \frac{\partial \lambda}{\partial z} \frac{\partial \mu}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} \frac{\partial \nu}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{\partial y} \frac{\partial \nu}{\partial y} + \frac{\partial \mu}{\partial z} \frac{\partial \nu}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \nu}{\partial x} \frac{\partial \lambda}{\partial x} + \dots = 0$$

Trindzenie ~~dy~~ Dupin'a: Krzywe przecięcia są liniami krzywizny.

N.p. Coniurchni współosiowe II trygu toki agytn

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 &= e_1^2 \\ a^2 - c^2 &= e_2^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b^2 &= a^2 - e_1^2 \\ c^2 &= a^2 - e_2^2 \end{aligned}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - e^2} + \frac{z^2}{a^2 - f^2} = 1 \quad \text{El.}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - e^2} - \frac{z^2}{f^2 - \mu^2} = 1 \quad \text{Hyp. I}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{e^2 - \nu^2} - \frac{z^2}{f^2 - \nu^2} = 1 \quad \text{Hyp. II}$$

Tutaj jednak wygodniej
wyrechoć x, y, z jako
fkc. λ, μ, ν ,

Pow. liniowa odr. i min. odr.
wznowe

$$x = a_2 + \alpha \quad y = b_2 + \beta$$

$$x = f_1(\alpha) \cdot 2 + \alpha \quad y = f_2(\alpha) \cdot 2 + f_3(\alpha)$$

pow. odr. = obwódca płaszczyzny mierzalnej // ~~która~~ której tworzący
jest odc. p.

zatem prosta musi być leżąca w pł.

$$\text{zatem } (x - a_2 + \alpha) + \lambda (y - b_2 - \beta) = 0 \quad \lambda = f_4(\alpha)$$

aby otrzymać obwódca:

$$x - (2d\alpha + d\alpha) - \lambda (2d\beta + d\beta) + d\lambda (y - b_2 - \beta) = 0$$

α to musi być stałe same jak we płaszczyźnie równoległej
wz. wtórnej - tamto:

$$2d\alpha + d\alpha + \lambda (2d\beta + d\beta) = 0$$

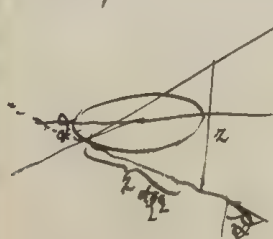
dla wszystkich α :

$$~~2d\alpha + d\alpha~~ \quad d\alpha + \lambda d\beta = 0$$

$$d\alpha + \lambda d\beta = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} d\alpha + \lambda d\beta = 0 \\ d\alpha + \lambda d\beta = 0 \end{array} \right\} d\alpha d\beta - d\beta d\alpha = 0$$

N.p. prosta prosta ~~na~~ na obwodzie koła



$$y = a \sin \alpha + 2 \cos \alpha$$

$$x = a \cos \alpha - 2 \sin \alpha$$

$$y^2 + x^2 = a^2 + 2^2 \cos^2 \alpha$$

$$\frac{y^2 + x^2}{a^2} - \frac{2^2}{(a \cos \alpha)^2} = 1$$

hyp. I.

56

$$r \frac{d}{dt} (r m \dot{\theta}) \frac{d}{dt} (c t r m \dot{\theta}) =$$

$$= -a \operatorname{ctg} \varepsilon \cdot [\sin^2 \theta + \sin^2 \theta] = -a \operatorname{ctg} \varepsilon \geq 0$$

2sta mi obrycha
Notre dni poniesci ~~sast~~ ^{se} sredni tvojce se skosne.

Gedragingzucht $a=0$ tot by lyf struk omdraaiing.

POLSKIE
TOWARZYSTWO PRZYRODNIKÓW
IM. KOPERNIKA.



Lwów dnia

